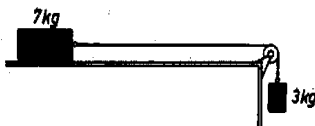


Az I. forduló feladatai

1. 7 kg tömegű láda vízszintes lapon nyugszik. A ládához kötött, csigán átvetett fonál végére 3 kg-os tömeget akasztunk. Ennek elengedése után 2 másodperc múlva a fonalat elégetjük. Mekkora utat tesz meg a láda? Hol van a leszakadt súly a láda megállásának pillanatában? (A láda és a súly mozgása számára a szükséges úthosszak rendelkezésre állnak.) A súrlódási együttható a sebességtől függetlenül 0,2.

Megoldás. A lehetséges legnagyobb súrlódási erő $0,2 \cdot 7 \text{ kp} = 1,4 \text{ kp} = 13,72 \text{ newton}$. Ez működésbe lép, mert a láda mozog. A mozgató erő $(3 - 1,4) \text{ kp} = 1,6 \text{ kp} = 15,68 \text{ newton}$, a mozgató tömeg 10 kg, ezért a keletkező gyorsulás $a = F : m = 15,68 \text{ N} : 10 \text{ kg} = 1,568 \text{ m/s}^2$. A második másodperc végén a sebesség $v = at = 3,136 \text{ m/s}$, az addig megtett út $s = at^2/2 = 3,136 \text{ m}$ (1. ábra).



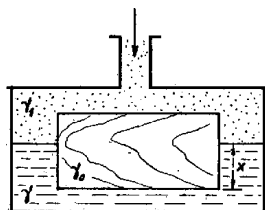
1. ábra

A fonál elégetése után a ládát a súrlódási erő fékezi, a fékező gyorsulás $13,72 \text{ newton} : 7 \text{ kg} = 1,96 \text{ m/s}^2$, a fékezés ideje $t = v/a = 3,136 : 1,96 = 1,6 \text{ s}$. Ezalatt a láda útja $s = 1,96 \cdot 1,6^2/2 = 2,509 \text{ m}$; a láda összes útja $3,136 \text{ m} + 2,509 \text{ m} \approx 5,65 \text{ m}$.

A súly a fonál elégetésének a pillanatától kezdve függőleges lefelé hajtást végez $3,136 \text{ m/s}$ kezdősebességgel. Ennek útja 1,6 s alatt $s = 3,136 \cdot 1,6 + 4,9 \cdot 1,6^2 \approx 17,6 \text{ m}$.

2. Egy tartályban víz van és ezen 10 cm vastagságú, $\gamma_0 = 0,5 \text{ p/cm}^3$ fajsúlyú deszka úszik. A csövön át 100 atmoszféra nyomású levegőt nyomunk be a tartályba. Milyen mélyen merül be a deszka? (Tekintsük a vizet összenyomhatatlannak. A hőmérséklet nem változik.) A levegő fajsúlya 1 atmoszféra nyomáson $0,0013 \text{ p/cm}^3$.

Megoldás. Két közeg határfelületén történő úszásról van szó (2. ábra).



2. ábra

Legyen x a folyadékba merülő rész magassága, d a deszka vastagsága és γ a folyadék fajsúlya. A levegő fajsúlya $\gamma_1 = 100 \cdot 0,0013 = 0,13 \text{ p/cm}^3$, mert a fajsúly arányos a nyomással. Az alapterület legyen A . A deszka súlya egyenlő a folyadékba és a gázba merülő részek felhajtóerőinek összegével:

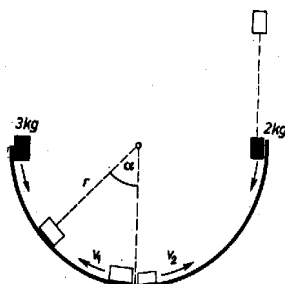
$$Ax\gamma + A(d - x) \cdot \gamma_1 = Ad\gamma_0.$$

Innen a folyadékba merülő rész magassága:

$$x = d \cdot \frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma - \gamma_1} = 10 \text{ cm} \cdot \frac{0,5 - 0,13}{1 - 0,13} = 4,25 \text{ cm}.$$

3. 4 méter átmérőjű, belül üres félgömb átellenes felső pontjairól $m_1 = 3 \text{ kg}$ -os és $m_2 = 2 \text{ kg}$ -os tömegeket egyszerre engedünk el. Ütközésük teljesen rugalmas. Mekkora magasságot érnek el a testek az első ütközés után? A súrlódás elhanyagolandó.

Megoldás. A két test egyszerre, egyformán $v = \sqrt{2gr}$ sebességgel érkezik a félgömb aljára (3. ábra).



3. ábra

Itt rugalmas ütközés megy végbe, melynek folyamán az impulzus is, a mozgási energia is állandó marad. A rugalmas ütközés ismert képleteivel az ütközés utáni sebességek:

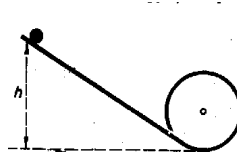
$$v_1 = -0,6v, \quad v_2 = 1,4v.$$

A balra irányuló sebességet számítottuk negatívnak.

A 3 kg-os tömeg ezzel a v_1 sebességgel $m_1gh_1 = m_1v_1^2/2$ alapján $h_1 = 0,36r = 0,72$ méter magassáig fut fel a félgömb belsejében. A 2 kg-os tömeg v_2 sebességével $m_2gh_2 = m_2v_2^2/2$ szerint $h_2 = 1,96r = 3,92$ méter magassáig jut fel, ami azt jelenti, hogy a félgömb pereme fölé még $0,96r = 1,92$ méter magassáig felrepül függőlegesen.

A II. forduló feladatai

1. 30° -os hajlásszögű lejtő $R = 2$ méter sugarú, függőleges síkú körpályához törés nélkül csatlakozik. A lejtőről $h = 2R$ magasságból $r = 1$ cm sugarú, $m = 20$ gramm tömegű golyót engedünk el (4. ábra).

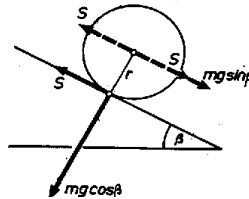


4. ábra

Legalábbis mekkora súrlódási együtthatóra van szükség, hogy a golyó csúszás nélkül guruljon végig?

(Nagy László)

Megoldás. Először vizsgáljuk meg, mi a feltétele annak, hogy β hajlásszögű lejtőn egy golyó megcsúszás nélkül, simán guruljon le (5. ábra).



5. ábra

A golyót a lejtő mentén $mg \sin \beta$ viszi lefelé, de az érintkezési pontban S súrlódási erő hat felfelé. A golyó középpontjában hozzáveszünk $\pm S$ erőket. Közülük a felfelé ható erőt összegezzük az $mg \sin \beta$ erővel. A golyó középpontja a állandó gyorsulással mozog lefelé, a mozgató erő:

$$(1) \quad ma = mg \sin \beta - S.$$

A golyót ezenkívül még Sr forgatónyomatékú erőpár forgatja. Mivel a szöggyorsulás egyenlő a forgatónyomaték és tehetetlenségi nyomaték hányadosával, ezért Sr forgatónyomaték Θ tehetetlenségi nyomaték mellett Sr/Θ szöggyorsulást okoz. A szöggyorsulást r rádiusszal szorozva a kerületmenti gyorsulást kapjuk meg:

$$(2) \quad a = \frac{Sr^2}{\Theta}.$$

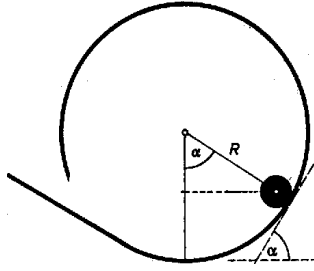
Az (1) és (2)-ből álló egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a golyó haladó mozgásának a gyorsulását és a működő S súrlódási erőt:

$$(3) \quad a = g \sin \beta \cdot \frac{mr^2}{\Theta + mr^2},$$

$$(4) \quad S = mg \sin \beta \cdot \frac{\Theta}{\Theta + mr^2}.$$

(L. egyébként a Lapok 1965. évi 6.számának 43. oldalát.)

Feladatunkban egy körpálya belsejében felszaladó golyóról van szó (6. ábra).



6. ábra

Határozza meg a golyó helyzetét a hozzávezető R rádiusznak a függőlegessel alkotott α szöge. Ebben a helyzetben a golyó pillanatnyilag α hajlásszögű lejtőn van, rá alkalmazhatók a (3) és (4) eredmények, természetesen β helyébe α -t téve. A golyó akkor mozog megcsúszás nélkül, ha a mozgásához szükséges súrlódási erő nem lépi túl azt az értéket, amely az adott súrlódási együttható mellett maximálisan keletkezhet. Ezért most megvizsgáljuk α függvényében mindkettőt.

A sima legördülés alkalmával szükséges súrlódási erő a golyó α szöggel jellemzett helyzetében (4) alapján:

$$(5) \quad S = mg \sin \alpha \cdot \frac{\Theta}{\Theta + mr^2}.$$

A maximálisan keletkezhető súrlódási erő számítása céljából szükségünk van arra az erőre, amely a golyót a merőlegesen kifelé nyomja a rádius irányában. Ez az erő az $mg \cos \alpha$ lejtőmenti súlyösszetevőnek és mv^2/R centrifugális erőnek az összege:

$$F_n = mg \cos \alpha + \frac{mv^2}{R}.$$

A kérdéses α helyzetben meglevő v sebességet az energiamegmaradás törvényével számítjuk. $mv^2/2$ haladásból származó mozgási energia mellett az ω szögsebességgel forgó golyónak $\Theta\omega^2/2 = \Theta v^2/2r^2$ forgási energiája is van. A lesüllyedés magassága $h - R + R \cos \alpha$, ha r -et elhanyagoljuk a sokkal nagyobb R mellett. Az energia megmaradása alapján:

$$mg(h - R + R \cos \alpha) = \frac{mv^2}{2} + \frac{\Theta v^2}{2r^2}.$$

Ebből az egyenletből a sebesség négyzete mint α függvénye:

$$v^2 = 2g(h - R + R \cos \alpha) \cdot \frac{mr^2}{\Theta + mr^2}.$$

Ezt behelyettesítjük F_n merőlegesen a falhoz nyomó erő előbbi kifejezésébe; összevonás után:

$$(6) \quad F_n = mg \left[2 \left(\frac{h}{R} - 1 \right) \cdot \frac{mr^2}{\Theta + mr^2} + \frac{\Theta + 3mr^2}{\Theta + mr^2} \cdot \cos \alpha \right].$$

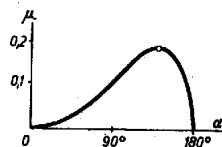
Ezt az F_n -t μ súrlódási együtthatóval megszorozva kapjuk a lehetséges legnagyobb súrlódási erőt: μF_n . Ha azt akarjuk, hogy a golyó ne csússzék meg, akkor μF_n , legalább is egyenlő kell, hogy legyen az (5) által megadott súrlódási erővel. (6) felhasználásával:

$$mg \sin \alpha \cdot \frac{\Theta}{\Theta + mr^2} = \mu mg \left[2 \left(\frac{h}{R} - 1 \right) \cdot \frac{mr^2}{\Theta + mr^2} + \frac{\Theta + 3mr^2}{\Theta + mr^2} \cdot \cos \alpha \right].$$

Ebből kifejezzük, miként függ a szükséges μ súrlódási együttható a golyó α szöggel jellemzett helyzetétől:

$$(7) \quad \mu = \frac{\sin \alpha}{2 \left(\frac{h}{R} - 1 \right) \frac{mr^2}{\Theta} + \left(1 + \frac{3mr^2}{\Theta} \right) \cos \alpha}.$$

A (7) alatti függést a 7. ábra mutatja.



7. ábra

A függvény maximuma, tehát a legnagyobb szükséges súrlódási együttható azon α_k szögnél van, amelyre

$$\cos \alpha_k = -\frac{3 + \frac{\Theta}{mr^2}}{2\left(\frac{h}{R} - 1\right)}.$$

¹ Felhasználva ezt az értéket (7)-ben, a szükséges legnagyobb súrlódási együttható:

$$\mu_k = \frac{\Theta}{\sqrt{4(mr^2)^2 \left(\frac{h}{R} - 1\right)^2 - (\Theta + 3mr^2)^2}}$$

Feladatunk számadatait felhasználva $\Theta = 2mr^2/5$, $h/R = 3$ és így a (7) szerinti súrlódási együttható:

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{10 + 8,5 \cos \alpha};$$

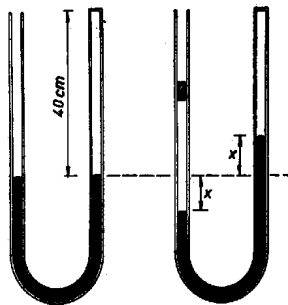
$\cos \alpha_k = -17/20 = -0,85$, $\alpha_k = 148,2^\circ$ és a szükséges legnagyobb súrlódási együttható:

$$\mu_k = \frac{2}{\sqrt{111}} = 0,1898.$$

Meg kell vizsgálni, hogy az a súrlódási együttható elegendő-e a $\beta = 30^\circ$ -os leszaladó lejtőn a sima gördüléshez. (4) alapján megvizsgálva gömbnél a β szögű lejtőn legalább $2 \tan \beta/7 = 0,165$ értékű súrlódási együttható szükséges. Ennél 0,1898 nagyobb, tehát a lejtőn is sima gördülés van.

2. Hosszú U alakú cső mindegyik szárában egyenlő magasan áll a higany. Az egyik szár nyitott, a másik zárt. A cső keresztmetszet területe $2,5 \text{ cm}^2$, a jobb oldali szárban elzárt légoszlop hossza 40 cm. A higany fajsúlya $13,6 \text{ p/cm}^3$. Ezután a nyitott csővéget súrlódásmentes dugattyúval elzárjuk és erre a dugattyúra 1190 pondos súlyt helyezünk. Az új egyensúly beállta után hogyan helyezkednek el a higanyfelszínek?

Megoldás. Célszerű a nyomásokat higanyoszlop-cm-ben számítani (8. ábra).



8. ábra

Tekintet nélkül a bal oldali légoszlop hosszára, a 76 Hgcm légnyomáshoz a dugattyú folytán hozzáadódó nyomás $1190/(2,5 \cdot 13,6) = 35 \text{ Hgcm}$. Eszerint a bal oldali higanyfelszínen a nyomás $76 + 35 = 111 \text{ Hgcm}$. Emiatt a higanyfelszínek $x \text{ cm}$ -rel mozdultak el. A nyomás a zárt csőben a higanyfelszín tetején $(111 - 2x) \text{ Hgcm}$. Alkalmazzuk Boyle–Mariotte törvényét a jobb oldali csőben elzárt levegőre:

$$2,5 \cdot 40 \cdot 76 = 2,5(40 - x)(111 - 2x).$$

Rendezve:

$$2x^2 - 191x + 1400 = 0.$$

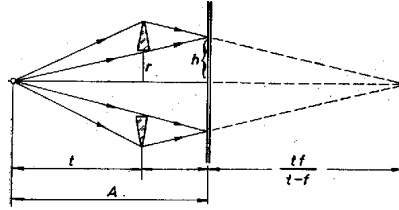
Ennek megoldása: $x_1 = 87,5 \text{ cm}$, $x_2 = 8 \text{ cm}$. Ez a második gyök használható, tehát a higanyfelszínek 8 cm-t mozdultak el lefelé és felfelé.

¹* α_k értékét differenciálszámítással, vagy a következő összefüggés felhasználásával kaphatjuk meg:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + A \cos \alpha} = \sqrt{\frac{1}{1 - A^2} \left[1 - \left(\frac{A + \cos \alpha}{1 + A \cos \alpha} \right)^2 \right]}.$$

3. $f = 4$ cm-es gyújtótávolságú, kör alakú, vékony gyűjtőlencse közepén egy kör alakú lyuk van, amelynek átmérője a lencse átmérőjének fele. Egy faltól $A = 9$ cm távolságban pontszerű fényforrás van. Hová helyezzük a lencsét, hogy a falon egyetlen, kívül élesen határolt megvilágított kör keletkezzék?

Megoldás. A lyuk határán átmenő sugárkúp az ernyőt h rádiuszú körben metszi (9. ábra).



9. ábra

A fényforrást leképező, a lencse külső szélén áthaladó fénysugaraknak ugyanezt a metszési kört kell adniuk az ernyőn. Jelöljük a lyuk rádiuszát r -rel, a fényforrás lencsétől mért távolságát t -vel; ekkor képének távolsága a lencsétől: $tf/(t-f)$. Hasonló háromszögekből:

$$\frac{h}{r} = \frac{A}{t},$$

$$\frac{h}{2r} = \frac{t + \frac{tf}{t-f} - A}{\frac{tf}{t-f}}.$$

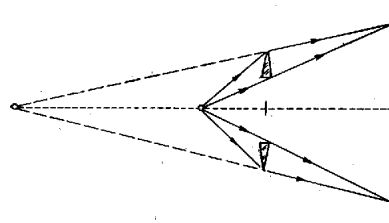
Ebből h/r kiejtése és rendezés után ez az egyenlet következik t -re nézve:

$$2t^2 - 2At + Af = 0.$$

Ennek megoldása:

$$t = \frac{A}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{A(A-2f)}.$$

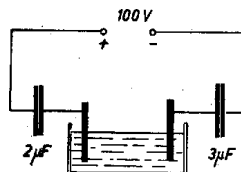
A mi esetünkben a fényforrás megkívánt elhelyezésére ez a két eredmény következik: $t_1 = 6$ cm, $t_2 = 3$ cm. Az első esetben a lencsét a fényforrástól 6 cm-re kell elhelyeznünk. Érdekes, hogy a második megoldás is eleget tesz a feladat követelményének, bár virtuális képalkotással jár (10. ábra).



10. ábra

Triviális megoldás még $t = 0$. A feladat csak akkor realizálható, ha $A > 2f$.

4. A 11. ábra szerint összekapcsoltunk 2 mikrofarados kondenzátort, rézsulfát oldattal megtöltött elektrolizáló edényt és 3 mikrofarados kondenzátort. Mennyi vörösréz válik le, ha a drótok végeire 100 voltos áramforrást kapcsolunk? A vörösréz elektrokémiai egyenértéke 0,33 mg/coulomb.



11. ábra

Megoldás. A kondenzátorok eredő kapacitása $2 \cdot 3/(2 + 3) = 1,2\mu F$. A kondenzátorokat megtöltő töltés $1,2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 1,2 \cdot 10^{-4}$ coulomb. Ennyi töltés megy be a kondenzátorok szélső lemezeibe és ennyi osztódik meg a belső lemezekből álló fémtestben. Közben ez a töltés átmegy a rézsulfát oldaton és kiválaszt $0,33 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} = 3,96 \cdot 10^{-8}$ gramm vöröszet.

Az 1969. évi fizikai tanulmányt verseny eredménye:

I. díj: *Maróti Péter* (Szeged, Ságvári E. g. IV. o. t. Tanára: Vozáry Pálné).

II. díj: *Spitzer József* (Budapest, Vörösmarty M. g. IV. o. t. Tanára: Óhegyi Ernő).

III. díj: *Somorjai gábor* (Budapest, I. István g. III. o. t. Tanára: Főzy István).

A további helyezettek: 4. *Erdős Géza* (Budapest, József A. g. IV. o. t.), 5. *Horváthy Péter* (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.), 6. *Háy György* (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.), 7. *Horváth András* (Budapest, Ady E. g. IV. o. t.), 8. *Ormos Pál* (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.), 9. *Grandpierre Attila* (Budapest, Fazekas M. g. IV. o. t.), 10. *Harmat Péter* (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.).