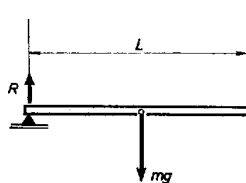


Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1968. október 19-én rendezte fizikai versenyét. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait és azok megoldását.

1. m tömegű, L hosszúságú rúd egyik végén ékkel van alátámasztva, másik végén fonállal van felfüggesztve. A fonalat elégetjük. A mozgás megindulásának pillanatában mekkora erővel nyomja a rúd az éket?

Megoldás: A rúd mozgását β szöggyorsulással kezdi el.



1. ábra

Ha az éket tekintjük tengelynek (1. ábra), akkor a súly forgatónyomatéka $mgL/2$ és a tehetetlenségi nyomaték a rúd végpontjára vonatkoztatva $mL^2/3$. Ezek hányadosa adja a szöggyorsulást:

$$\beta = \frac{mgL/2}{mL^2/3} = \frac{3g}{2L}.$$

Az éknél R reakcióerő nyom felfelé. A β szöggyorsulást úgy is számíthatjuk, mintha a rúd a középpontja körül forogna; ekkor a forgatónyomaték $RL/2$, a tehetetlenségi nyomaték $mL^2/12$ és ismét ezek hányadosa adja a szöggyorsulást:

$$\beta = \frac{RL/2}{mL^2/12} = \frac{6R}{mL}.$$

A szöggyorsulás kétféleképp kiszámított értékeit egyenlővé téve:

$$\frac{3g}{2L} = \frac{6R}{mL}.$$

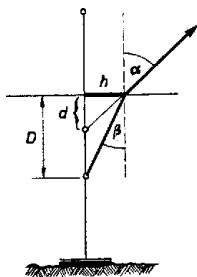
Innen az éknél működő erő:

$$R = \frac{mg}{4}.$$

Tehát a mozgás megindulásának pillanatában a rúd súlyának negyedével nyomja az éket. A szöggyorsulás $3g/2L$ értékéből megtudjuk, hogy a rúd súlypontja $\beta L/2 = 3g/4$, vége pedig $\beta L = 3g/2$ gyorsulással indul el.

2. 4 méter mély medence fenekén sítükör fekszik. Egy fényképész gépével 2 méter magasan van a víz szintje felett. A víz szintje alatt 2 méter mélyen hal úszik. Hány méterre kell a gép lencséjét élesre állítani, ha a) az úszó halat, b) a hal tükörképét akarja lefényképezni?

Megoldás. A víz alól β mélységből induló fénysugár (2. ábra) a vízben β szöget alkot a beesési merőlegessel.



2. ábra

A levegőbe kilépve a fénysugár a beesési merőlegestől törik, vele α szöget alkotva, azután a levegőben úgy halad tovább, mintha d mélységből jönne. Ha n a törésmutató, akkor a fénytörés törvénye szerint:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Kis szögeknél a sinus helyett vehető a tangens és ekkor közelítő pontossággal:

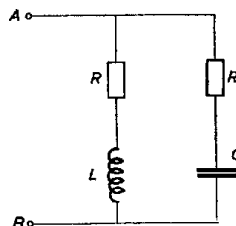
$$n = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{h/d}{h/D} = \frac{D}{d}, \quad \text{vagyis} \quad d = \frac{D}{n}.$$

Tehát n törésmutatójú anyagréteg a törésmutató arányában hozza közelebb a tárgyat. De ez csak kis szögeknél érvényes, ha majdnem pontosan merőlegesen vagyunk a hal fölött. Szigorúan véve nincs is képalkotás, az egyetlen D mélységben levő pontból kiinduló fénysugarak a levegőben úgy haladnak tovább, hogy hátrafelé rajzolt meghosszabbításaik nem találkoznak egyetlen pontban. A gyakorlatban ez a körülmény nem szokott szerepet játszani, mert csak szűk sugárnyalábot használunk fel. A víz törésmutatója $4/3$.

a) esetben a levegőben mért 2 méterhez még $2 : 4/3 = 1,5$ métert kell hozzáadnunk és a szükséges élesre állítási távolság $2 + 1,5 = 3,5$ méter.

b) esetben figyelembe kell vennünk, hogy a hal tükörképe olyan sajátságú, mintha a vízben még 2 méterrel volna a fenék alatt. Tehát a sugármenet olyan, mintha 6 méteres vízben megtett út után kerülne ki a levegőbe. Tehát a levegőben számított 2 méterhez $6 : 4/3 = 4,5$ métert kell hozzáadni és így a szükséges élesre állítási távolság $2 + 4,5 = 6,5$ méter.

3. A rajz szerinti kapcsolásban (3. ábra) mindkét ohmos ellenállás egyenlő (R). Az A és B pontokra váltófeszültséget kapcsolunk. Mekkora legyen L és C , hogy az egész berendezés R nagyságú ohmos ellenállásként viselkedjék?



3. ábra

Megoldás. Mindkét ágba ω körfrekvenciájú sinusos váltóáram folyik:

$$I_L = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi_L),$$

$$I_C = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_C).$$

φ_L , illetve φ_C az áramerősség fáziskülönbsége a feszültséghez képest. A váltóáramok tanából ismeretes, hogy:

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{\omega L}{R},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_C = \frac{1/\omega C}{R}.$$

A szögfüggvények összefüggései alapján a sinus és cosinus:

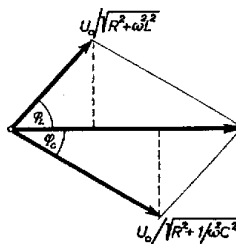
$$\sin \varphi_L = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \cos \varphi_L = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

$$\sin \varphi_C = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}, \quad \cos \varphi_C = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}.$$

A két sinusos áram összege a teljes áram, amelynek $U_0 \sin \omega t / R$ -nek kell lennie.

Ismeretes, hogy ugyanazon frekvenciájú, de különböző fázisú sinus-függvények formálisan a paralelogrammatétel szerint adhatók össze. (Lásd például a Középiskolai Matematikai Lapok 1964. évi februári számának 82. oldalán.) Az amplitúdókat a fázisszögek felhasználásával arányos hosszúságú nyilakkal rajzoljuk fel és ezeket a paralelogrammaszerkesztéssel összegezzük. Az átló megadja az eredő sinus-függvény amplitúdóját és fázisszögét.

A mi esetünkben mérjük fel a két váltóáram amplitúdóját és fázisszögét az adott váltófeszültséghez képest (4. ábra).



4. ábra

A paralelogramma átlójának a feladat szerint a váltófeszültség irányába kell esnie. Eszerint az átlóra merőleges vetületeknek ellentétesen egyenlőknek kell lenni:

$$\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \sin \varphi_L = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}} \cdot \sin \varphi_C;$$

Felhasználva a fázisszögek sinusainak előbb felírt értékeit:

$$\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1/\omega C}{R^2 + 1/\omega^2 C^2}.$$

Ennek rendezésével kapjuk:

$$R^2 = \frac{L}{C} \cdot \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}.$$

Tehát annak feltétele, hogy az eredő áramerősség a rákapcsolt feszültséggel egyező fázisban legyen:

$$R^2 = \frac{L}{C}.$$

Ha ez a feltétel teljesül, akkor az egész berendezés ohmos ellenállásként viselkedik. De vajon mekkora ohmos ellenállásként?

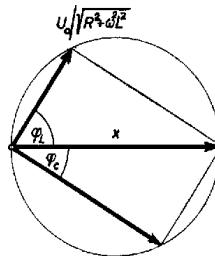
Minden, a 3. ábra szerinti párhuzamos kapcsolásnál a fázisok tangenseinek szorzata:

$$\operatorname{tg} \varphi_L \cdot \operatorname{tg} \varphi_C = \frac{\omega L}{R} \cdot \frac{1/\omega C}{R} = \frac{L}{CR^2},$$

függetlenül a frekvenciától. De a mi esetünkben, ha megvalósítjuk az $R^2 = L/C$ feltételt:

$$\operatorname{tg} \varphi_L \cdot \operatorname{tg} \varphi_C = 1,$$

vagyis a fázisszögek pótszögek, $\varphi_L + \varphi_C = 90^\circ$, a 4. ábra paralelogrammája téglalap és annak átlója egy Thales-kör átmérője.



5. ábra

Az 5. ábrában téglalapként rajzolt paralelogramma átlója, mint egy derékszögű háromszög átfogója:

$$x = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} : \cos \varphi_L = \frac{U_0}{R}.$$

Felhasználtuk $\cos \varphi_L$ előbb felírt értékét. Tehát betartva a feszültség fázisát teljesítő $R^2 = L/C$ feltételt egyidejűleg teljesül az a kívánság is, hogy az eredő ellenállás R . Vagyis a feladat megoldása: úgy választandó L és C , hogy hányadosuk R ellenállás négyzete legyen. Ez a feltétel független a frekvenciától. A rezonancia esete sem kivétel, ekkor a téglalapról négyzet lesz.

A verseny eredménye. Az I. díjat nyerte *Babai László*, a budapesti tudományegyetem matematikus hallgatója, (tavaly a budapesti Fazekas gimnáziumban Hutai Ferenc tanítványa). A két II. díjat nyerték: *Marossy Ferenc* honvéd (tavaly a budapesti Fazekas gimnáziumban Hutai Ferenc tanítványa) és *Nagy Zsigmond*, a budapesti tudományegyetem matematikus hallgatója, (tavaly a budapesti Kaffka M. gimnáziumban Fekete Eszter tanítványa). III. díjat kapott *Vetier András*, a budapesti tudományegyetem matematikus hallgatója, (tavaly a budapesti Fazekas gimnáziumban Hutai Ferenc tanítványa). A versenyen résztvevő középiskolai tanulók közül dicséretet és könyvjutalmat kapott *Maróti Péter*, a szegedi Ságvári gimnázium IV. o. tanulója (tanára Dr. Vozáry Pálné). Dicséretet kaptak még a gimnáziumi tanulók közül: *Andor László*, *Bajmóczy Ervin*, *Balogh Gábor*, *Horváthy Péter*, az érettségizettek közül *Bernus Péter*, *Egri Róbert*, *Grósz Tamás*, *Várhelyi Ferenc*.