

Megjegyzés az 1224. gyakorlathoz¹

Megmutatjuk, hogy a végzett műveletsorozat végén a szám elejére átirított számjegy csak 7-es lehetett.

Jelöljük Jóska eredetileg gondolt számát x -szel. Ebből a végzett szorzások, összeadások útján a következő számot képeztük:

$$(1) \quad y = 77 \cdot 33[23 \cdot 11(23x + 1) + 1].$$

Jelöljük ennek utolsó számjegyét B -vel, az utolsó számjegy elhagyásával kapott számot A -val, azaz legyen

$$y = 10A + B.$$

Itt $B > 0$, hisz különben nem lehetne osztó, másrészt nyilván $B < 10$.

A végzett további műveletek alapján

$$(2) \quad 10^{k-1} \cdot B + A = B(10A + B),$$

ahol k az y szám számjegyeinek száma. Átrendezéssel adódik

$$A = B \cdot \frac{10^{k-1} - B}{10B - 1},$$

s ebből

$$(3) \quad y = 10A + B = B \cdot \frac{10^k - 1}{10B - 1}.$$

Amennyiben tehát van megoldás, akkor y csak (3) alakú szám lehet. Ezt az értéket (1)-be visszahelyettesítve látható, hogy a

$$B \cdot \frac{10^k - 1}{(10B - 1) \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11^2}$$

kifejezés egész szám. Mivel B nem osztható 11-gyel, azért $10^k - 1$ osztható 11^2 -nel. Nézzük meg, hogy ez milyen k értékek mellett teljesül.

Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy a 11-gyel való oszthatóság is csak akkor teljesül, ha k páros. Legyen ugyanis $k = 2n + m$, ahol $m = 0$, ha k páros és $m = 1$, ha páratlan, így

$$10^k - 1 = 10^m(10^{2n} - 1) + 10^m - 1.$$

Itt $10^{2n} - 1$ osztható $10^2 - 1 = (10 - 1)(10 + 1)$ -gyel, így valóban az oszthatósághoz szükséges és elégséges, hogy $m = 0$ legyen, és eszerint $k = 2n$.

Mármost ahhoz, hogy a 11^2 -nel való oszthatóság is teljesüljön, a

$$(4) \quad \frac{(10^2)^n - 1}{10^2 - 1} = (10^2)^{n-1} + (10^2)^{n-2} + \dots + (10^2) + 1$$

hányadosnak is oszthatónak kell lennie 11-gyel. Nem nehéz belátni, hogy ez így alakítható:

$$\begin{aligned} \frac{(10^2)^n - 1}{10^2 - 1} &= (10^2)^{n-2} \cdot (10^2 - 1) + 2 \cdot (10^2)^{n-3} \cdot (10^2 - 1) + \\ &+ 3 \cdot (10^2)^{n-4} \cdot (10^2 - 1) + \dots + (n-1) \cdot (10^2)^0 \cdot (10^2 - 1) + n. \end{aligned}$$

Mivel a jobb oldalon az utolsó tag kivételével minden tag osztható $10^2 - 1$ -gyel, s így 11-gyel, szükséges és elégséges, hogy n osztható legyen 11-gyel, tehát $10^k - 1$ akkor és csak akkor osztható 11^2 -nel, ha $k = 22r$ alakú.

Behelyettesítve ezt (3)-ba, (1) felhasználásával nyerjük, hogy a

$$(5) \quad \frac{B(10^{22r} - 1)}{77 \cdot 33(10B - 1)} - 1 \quad \left[= 11(23x + 1) \right]$$

kifejezés egész szám. Megjegyezzük, hogy $10^{22r} - 1$ mindig osztható 23-mal. Mivel $(10^{22})^r - 1$ osztható $10^{22} - 1$ -gyel, elegendő az utóbbiról belátni, hogy osztható 23-mal. Mivel

$$10^{22} = 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{16},$$

¹Lásd a megoldást ezen számban, 214. o.

azért 23-mal osztva

10^2 maradéka: 8,

$10^4 = (10^2)^2$ maradéka megegyezik $8^2 = 64$ maradékával, ami 18,

$10^8 = (10^4)^2$ maradéka megegyezik $18^2 = 324$ maradékával, ami 2,

$10^{16} = (10^8)^2$ maradéka megegyezik 2^2 maradékával, ami 4 és így

10^{22} maradéka megegyezik $8 \cdot 18 \cdot 4$ maradékával, ami pedig 1. Tehát

10^{22} -t 23-mal osztva 1-et kapunk maradékul, így

$10^{22} - 1$ valóban osztható 23-mal.

Ebből következik, hogy az (5) kifejezés csak akkor lehet egész, ha $10B - 1$ osztható 23-mal; különben ugyanis a számlálóbeli tört kifejezés osztható maradna 23-mal, a második viszont nem osztható vele, tehát (5) nem lehetne egész. Mármint a számjegyeket sorra véve $10B - 1$ csak $B = 7$ esetén osztható 23-mal.

Ezt a gondolatmenetet végigjárva nincs szükség Pista ellesett adatára; ezt viszont gyakorlat-megoldóinktól nem kívánhattuk meg.

Megjegyezzük végül, hogy meggondolásunk jóval rövidebb lett volna az ún. Fermat-tétel felhasználásával.