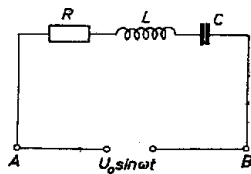


Néhány példa kapcsán módszert mutatunk be arra, hogyan lehet meghatározni a feszültség és az áramerősség pillanatnyi értékét váltóáramú áramkörökben.

Első példaként vizsgáljuk meg a váltakozó feszültségre kötött, sorba kapcsolt önindukcióból (L), ellenállásból (R) és kapacitásból (C) álló lánc áram- és feszültségviszonyait. Jelöljük rendre $i(t)$ -vel, $u_L(t)$ -vel és $q(t)$ -vel a t időpontban a körben folyó áramot, az önindukciós tekercsben indukált feszültséget és a kondenzátorban tárolt töltést. *KIRCH-HOFF II.* törvénye szerint bármely időpillanatban az R ellenálláson eső feszültség és a kondenzátor kapcsain uralkodó feszültség algebrai összege egyenlő az AB kapcsokra (1. ábra) kívülről ráadott $U_0 \cdot \sin(\omega t)$ hálózati feszültség és az indukciós tekercsben indukált feszültség algebrai összegével:

$$(1) \quad R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = u_L(t) + U_0 \cdot \sin(\omega t).$$



1. ábra

Az indukált feszültség a mágneses tér változásának sebességével, a mágneses tér erőssége pedig az árammal arányos. Ez azt jelenti, hogy $u_L(t)$ az áram változásának sebességével arányos:

$$(2) \quad u_L(t) = -L \cdot i'(t).$$

Egyenletünkben a negatív előjel azt fejezi ki, hogy az indukált feszültség olyan áramot indít a vezetőkben, amely az indukáló mágneses teret csökkenti. Az áram-változás sebességét azért jelöltük $i'(t)$ -vel, hogy az áram és az áram-változás sebessége közötti szoros kapcsolatot a jelölésmóddal is kiemeljük. A (2)-es egyenletet (1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$(3) \quad L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = U_0 \cdot \sin(\omega t).$$

Egyenletünkben három ismeretlen van: $i'(t)$, $i(t)$ és $q(t)$. Ez a három függvény azonban nem független egymástól. Ha például a kondenzátor töltése a

$$(4) \quad q(t) = m \cdot t$$

összefüggés szerint változna, akkor a körben folyó áram (ami nem más, mint $q(t)$ változásának sebessége)

$$(5) \quad i(t) = q'(t) = \frac{mt_1 - mt_2}{t_1 - t_2} = m$$

lenne, $i'(t)$ pedig azonosan zérus volna. Ha

$$(6) \quad q(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

akkor

$$(7) \quad i(t) = q'(t) = a \cdot t$$

és

$$(8) \quad i'(t) = a.$$

Ugyanis (6) teljesen azonos szerkezetű a szabadesés útképletével:

$$(9) \quad s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

és tudjuk, hogy a szabadon eső test mechanikai sebessége (azaz s változásának a sebessége)

$$(10) \quad v = s' = gt,$$

gyorsulása pedig (azaz a sebesség változásának sebessége)

$$(11) \quad a = v' = g.$$

$$\text{Hasonlóképpen, ha} \quad q(t) = Q_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (12)$$

$$\text{akkor} \quad i(t) = q'(t) = Q_0 \omega \cos(\omega t - \varphi) \quad (13)$$

$$\text{és} \quad i'(t) = -Q_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi), \quad (14)$$

miként az a harmonikus rezgőmozgással való analógia alapján nyilvánvaló. Tudjuk ugyanis, hogy az egyensúlyi helyzettől való pillanatnyi kitérés (x), a sebesség és a gyorsulás harmonikus rezgés esetén a következő egyenletekkel írható le:

$$(15) \quad x = x_0 \sin(\omega t),$$

$$(16) \quad v = x' = x_0 \omega \cos(\omega t),$$

$$(17) \quad a = v' = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t).$$

Fizikai érzékünk azt súgja, hogy a (3) egyenletet kielégíti egy

$$(18) \quad q(t) = Q_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

alakú függvény. Sejtésünket behelyettesítéssel igazoljuk. $q(t)$ -t és (18)-nak (13) és (14) szerint megfelelő $i(t)$ -t és $i'(t)$ -t (3)-ba beírva

$$(19) \quad -LQ_0\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + RQ_0\omega \cos(\omega t - \varphi) + \frac{Q_0}{C} \sin(\omega t - \varphi) = U_0 \sin(\omega t).$$

Az ismert trigonometrikus összefüggések alapján írható, hogy:

$$(20) \quad \begin{aligned} & -LQ_0\omega^2 [\sin(\omega t) \cdot \cos \varphi - \cos(\omega t) \cdot \sin \varphi] + RQ_0\omega [\cos(\omega t) \cdot \cos \varphi + \\ & + \sin(\omega t) \cdot \sin \varphi] + \frac{Q_0}{C} [\sin(\omega t) \cdot \cos \varphi - \cos(\omega t) \cdot \sin \varphi] = U_0 \sin(\omega t); \end{aligned}$$

illetve:

$$(21) \quad \begin{aligned} & \sin(\omega t) \left[RQ_0\omega \sin \varphi + \left(\frac{Q_0}{C} - LQ_0\omega^2 \right) \cos \varphi - U_0 \right] + \\ & + \cos(\omega t) \left[RQ_0\omega \cos \varphi - \left(\frac{Q_0}{C} - LQ_0\omega^2 \right) \sin \varphi \right] = 0. \end{aligned}$$

Ez az egyenlet akkor teljesül minden t időpillanatban, ha mind $\cos(\omega t)$, mind $\sin(\omega t)$ együtthatója zérus, azaz ha

$$(22) \quad RQ_0\omega \sin \varphi + \left(\frac{Q_0}{C} - LQ_0\omega^2 \right) \cos \varphi - U_0 = 0,$$

$$(23) \quad RQ_0\omega \cos \varphi - \left(\frac{Q_0}{C} - LQ_0\omega^2 \right) \sin \varphi = 0.$$

(22) és (23) teljesülése viszont szükséges feltétele is (21) teljesülésének, mert a $t = 0$ pillanatban (21) (22)-vel, a $t = \frac{\pi}{2\omega} = T/4$ időpontban pedig (21) (23)-mal azonos.

(18) próbafüggvény tehát akkor megoldása a (3) egyenletnek, ha a Q_0 és φ paraméterek a (22) és (23) egyenlet megoldásai, azaz ha

$$(24) \quad \operatorname{tg} \varphi = - \frac{R}{L\omega - \frac{1}{\omega C}}$$

és

$$(25) \quad Q_0 = \frac{U_0}{\omega \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2}}.$$

($\operatorname{tg} \varphi$ -t (23)-ból fejeztük ki. Utána a már ismert $\operatorname{tg} \varphi$ segítségével megállapítottuk $\sin \varphi$ és $\cos \varphi$ értékét, és ezeket (22)-be helyettesítettük. Így Q_0 kifejezése már csak némi rendezést követelt.)

Ha a (3) egyenlet megoldását „ügyetlenül” megválasztott próbafüggvénnyel kísérjük meg (pl. próbafüggvénynek a $q(t) = a \cdot t^2$ -et vagy a $q(t) = Q_0 \cdot \sin(\omega t)$ függvényt választjuk), akkor a próbafüggvény paramétereinek alkalmas megválasztásával sem tudjuk egyenletünket minden t értékre kielégíteni.

A (3) egyenlet általános megoldásáról és a (18) típusú megoldás különleges szerepéről a cikk végén fogunk szólni.

(18), (13), (14), (24) és (25) felhasználásával kiszámíthatjuk a körben folyó áramot, valamint az ellenálláson eső, a kondenzátoron uralkodó és a tekercsben indukált feszültséget. (Jelöljük ezeket a feszültségeket rendre $u_R(t)$ -vel, $u_C(t)$ -vel és $u_L(t)$ -vel.)

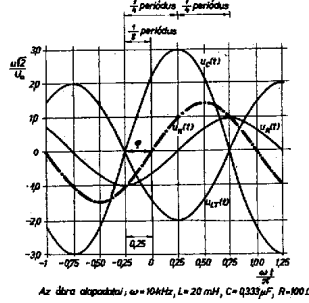
$$(26a) \quad i(t) = q'(t) = Q_0 \omega \cos(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

$$(26b) \quad u_C(t) = q(t)/C = \frac{Q_0}{C} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t - \varphi),$$

$$(26c) \quad u_R(t) = R \cdot i(t) = RI_0 \cos(\omega t - \varphi) = RQ_0 \omega \cos(\omega t - \varphi),$$

$$(26d) \quad u_L(t) = -L \cdot i'(t) = +L\omega I_0 \sin(\omega t - \varphi) = +L\omega^2 Q_0 \sin(\omega t - \varphi).$$

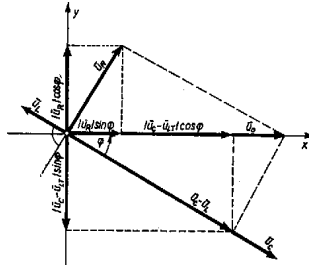
Eredményeink grafikonja a 2. ábrán látható.



2. ábra

Az ábrán feltüntettük a kívülről a láncra adott feszültség $[U_K(t)]$ menetét is. Az ellenálláson eső feszültség az áramerősséggel szinkronban van, míg a kondenzátoron eső feszültség az áramerősséghez képest negyedperiódust késik. Mivel a (3) egyenlet szorosabb analógiát mutat az egyenáramú áramkörök szokásos egyenleteivel, mint az (1) egyenlet, azért a technikai irodalomban az indukciós tekercs feszültségviszonyait kényelmi szempontból nem az $u_L(t) = -L \cdot i'(t)$ indukált feszültséggel, hanem az $u_{LT}(t) = -u_L(t)$ ugyancsak feszültség dimenziójú mennyiséggel szokták jellemezni. u_{LT} -t az analógia kedvéért az induktív „ellenálláson” eső feszültségnek szokták nevezni. u_{LT} az áramhoz képest negyedperiódust siet.

(3) egyenlet (18) típusú megoldásának paramétereit meghatározó (22) és (23) egyenlethez egyszerű geometriai képet fűzhetünk (3. ábra).



3. ábra

Vezessük be a következő négy feszültség amplitúdó vektort: $\vec{U}_{LT}$ -t, $\vec{U}_R$ -et, $\vec{U}_C$ -t és $\vec{U}_K$ -t úgy, hogy

$$(26e) \quad |\vec{U}_{LT}| = L\omega I_0 = L\omega^2 Q_0,$$

$$(26f) \quad |\vec{U}_R| = RI_0 = R\omega Q_0,$$

$$(26g) \quad |\vec{U}_C| = \frac{Q_0}{C} = \frac{I_0}{\omega C},$$

$$(26h) \quad |\vec{U}_K| = U_0$$

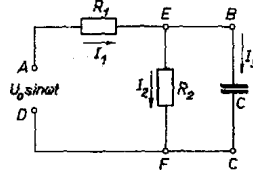
legyen, továbbá $\vec{U}_{LT}$ és $\vec{U}_C$ legyenek egymással ellentétes irányúak és $\vec{U}_R$ legyen merőleges ezekre a vektorokra és irányát pozitív forgás vigye át $\vec{U}_{LT}$ irányába. Követeljük meg, hogy

$$(26i) \quad \vec{U}_K = \vec{U}_{LT} + \vec{U}_C + \vec{U}_R$$

legyen. A 3. ábra alapján nyilvánvaló, hogy a (22) és a (23) egyenlet éppen a (26i) által előírt vektorösszeadás elvégzését jelenti az x és y irányú komponensekre való bontás segítségével.

Meg kell jegyeznünk, hogy (26i) nem ekvivalens (3)-mal, mert mint később látni fogjuk, (3)-nak a (26i) által megadottól különböző megoldásai is vannak. (26i) a (18) típusú megoldás paramétereinek meghatározására szolgáló egyenleteket foglalja össze szemléletes alakban. (26i) és (3) között lényeges formai különbség is van. (26i)-ben időben állandó vektorokat adunk össze, míg (3)-ban időtől függő mennyiségek algebrai összegét képezzük.

Második példaként foglalkozunk a 4. ábrán vázolt áramkörrel.



4. ábra

KIRCHHOFF I. törvényét az E csomópontra alkalmazva

$$(27) \quad i_1(t) = i_2(t) + i_3(t).$$

KIRCHHOFF II. törvényét az $AEFD$ illetve az $EBCF$ körökre alkalmazva

$$(28) \quad R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) = U_0 \sin(\omega t),$$

$$(29) \quad R_2 \cdot i_2(t) - \frac{q_3(t)}{C} = 0.$$

Keressünk megoldást

$$(30a) \quad i_1(t) = I_{10} \cos(\omega t - \varphi_1),$$

$$(30b) \quad i_2(t) = I_{20} \cos(\omega t - \varphi_2),$$

$$(30c) \quad i_3(t) = I_{30} \cos(\omega t - \varphi_3)$$

alakban. (12) és (13) alapján látható, hogy a

$$(31) \quad q_3(t) = Q_0 \sin(\omega t - \varphi_3)$$

választás a

$$(32) \quad q_3(t) = Q_0 \omega \cos(\omega t - \varphi_3) = i_3(t)$$

egyenletet akkor elégíti ki, ha

$$(33) \quad I_{30} = Q_0 \omega.$$

(27)-et (28)-ba helyettesítve (30), (31) és (33) felhasználásával, némi trigonometrikus átalakítás után azt kapjuk, hogy

$$(34) \quad \begin{aligned} & [(R_1 + R_2) \cdot I_{20} \cdot \cos \varphi_2 + R_1 \cdot I_{30} \cdot \cos \varphi_3] \cos(\omega t) + \\ & + [(R_1 + R_2) \cdot I_{20} \cdot \sin \varphi_2 + R_1 \cdot I_{30} \sin \varphi_3 - U_0] \sin(\omega t) = 0, \end{aligned}$$

$$(35) \quad \begin{aligned} & \left[R_2 \cdot I_{20} \cdot \cos \varphi_2 + \frac{I_{30}}{\omega C} \sin \varphi_3 \right] \cos(\omega t) + \\ & + \left[R_2 \cdot I_{30} \cdot \sin \varphi_2 - \frac{I_{30}}{\omega C} \cdot \cos \varphi_3 \right] \sin(\omega t) = 0. \end{aligned}$$

A (21) egyenletnél alkalmazott érvelést megismételve belátható, hogy (34) és (35) teljesülésének az a szükséges és elégséges feltétele, hogy $\sin(\omega t)$ és $\cos(\omega t)$ együtthatói mindkét egyenletben zérussal legyenek egyenlőek. Ezáltal négy egyenletet kapunk a próbafüggvényekben szereplő négy ismeretlen paraméter (I_{20} , I_{30} , φ_2 , φ_3) meghatározására. Eredményünk:

$$(36a) \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{R_1 R_2 \omega C}{R_1 + R_2} \quad \left(0 \leq \varphi_3 < \frac{\pi}{2} \right),$$

$$(36b) \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{ctg} \varphi_3 \quad \left(\frac{\pi}{2} < \varphi_2 \leq \pi \right),$$

$$(36c) \quad I_{20} = \frac{U_0}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 \omega C)^2}},$$

$$(36d) \quad I_{30} = \frac{U_0 \omega C R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 \omega C)^2}}.$$

I_{10} és φ_1 meghatározását az olvasóra bízjuk. Állítsuk fel a paraméterek meghatározására szolgáló négy egyenletnek megfelelő két vektor-ábrát is.

Harmadik példaként elemezzük egy R_T ellenállással terhelt transzformátor feszültség-viszonyait. A primer és szekunder tekercsben folyó váltóáram $[i_1(t)$ és $i_2(t)]$ váltakozó mágneses teret kelt a szóban forgó tekercsek belsejében, amely feszültséget indukál a primer, illetve szekunder tekercsben $[u_1(t)$ és $u_2(t)]$. Az ilyen módon indukált feszültség nagyságát a következő képlet adja:

$$(37a) \quad u_1(t) = -(L_{11} \cdot i_1'(t) + L_{12} \cdot i_2'(t)),$$

$$(37b) \quad u_2(t) = -(L_{21} \cdot i_1'(t) + L_{22} \cdot i_2'(t)).$$

L_{11} , ill. L_{22} a primer, ill. szekunder tekercs önindukciós együtthatója; $L_{12} = L_{21}$ pedig a két tekercs kölcsönös indukciós együtthatója. Ezek az együtthatók légmagos transzformátor esetén csak a tekercsek geometriai jellemzőitől és a menetszámoktól függenek. Ha a primer, ill. szekunder tekercs huzalának *OHM* törvénye alapján számított ellenállása R_1 , ill. R_2 , akkor *KIRCHHOFF II.* törvénye szerint:

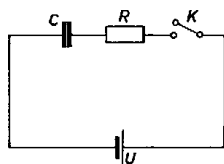
$$(38a) \quad R_1 \cdot i_1(t) = U_0 \sin(\omega t) + u_1(t),$$

$$(38b) \quad R_2 \cdot i_2(t) + R_T \cdot i_2(t) = u_2(t).$$

(37) és (38) egyenletek segítségével a korábbiakhoz hasonló megfontolások segítségével a primer és szekunder áram, ill. feszültség kiszámítható. A számítás elvégzését és a vektor-ábra felállítását az olvasóra bízjuk. Vizsgáljuk meg a transzformátor feszültség-viszonyait kapacitással való terhelés esetében is.

Váltóáramú áramkörti feladatainkat úgy oldottuk meg, hogy megsejtettük a számunkra lényeges megoldás típusát és egyenleteinkből csak a próbafüggvényben szereplő paraméterek értékeit határoztuk meg. Megemlítjük, hogy ez a módszer teljesen általános, nevezetesen: tetszőleges L_{ik} , C és R elemekből álló áramkörti probléma megoldása megadható elegendően sok $Q_0 \sin(\omega t - \varphi)$ típusú függvény ügyes illesztésével, ha a külső feszültség $U_0 \sin(\omega t)$ lefutású. A paraméterek meghatározására szolgáló egyenletek a vektor-ábrákból is leolvashatóak, ha megismertük azt, hogy az alapegyenleteknek megfelelő vektorábrákat hogyan megszerkeszteni. A vektorábrák felrajzolása tulajdonképpen a $\sin(\omega t - \varphi)$ és $\cos(\omega t - \varphi)$ függvények szorzatok összegére való bontásának egy geometriailag szemléltetett módja.

Fordítsuk most figyelmünket egy minőségileg más áramkörti problémára. Kapcsoljunk első példaképpen U egyenfeszültségű áramforrásra R ellenálláson keresztül C kapacitást. Zárjuk a K kapcsolót (5. ábra) a $t = 0$ pillanatban rövidre.



5. ábra

Ekkor nyilván minden $t \geq 0$ időpontban:

$$(39) \quad R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = U$$

és $i(t)$ itt is $q(t)$ időbeli változásának sebességével egyenlő. Ezt az egyenletet is a $q(t)$ függvény alakjának megsejtése útján próbáljuk megoldani.

Előkészítésként szóljunk néhány szót a jól ismert $y = a^x$ függvényről. ($y = a^x$ értékét a 10-es alapú logaritmus táblázat segítségével a következőképpen számítjuk ki. Az egyenlőség mindkét oldalának vegyük a 10-es alapú logaritmusát: $\lg y = x \cdot \lg a$. Így y -t megkapjuk, ha az $x \cdot \lg a$ számot a táblázatban visszakeressük.) Vegyük észre, hogy az $y = 10^x$ függvény számtalan más formában is felírható:

$$(40) \quad y = 10^x = 2^{x/\lg 2} = 3^{x/\lg 3} = \dots$$

(Ugyanis a fenti mennyiségek 10-es alapú logaritmusai egyenlők.) A matematikában és a fizikában az $y = a^x$ alakú függvényeket az

$$(41) \quad y = e^{x/x_0} = \exp\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

alakban szokták felírni. Itt e egy nevezetes számot jelent, amelynek értéke $2,71828\dots$ és $\lg e = 0,434294\dots$ (Ezen adatok birtokában minden x/x_0 értékhez meg lehet határozni az $y = \exp(x/x_0)$ értéket a 10-es alapú logaritmus tábla segítségével.)

Határozzuk meg az $y = \exp(-t/\tau)$ függvény időbeli változásának sebességét. (τ rögzített paraméter.) A t_1 és t_2 pontok közötti átlagsebesség:

$$(42a) \quad z(t_1, t_2) = \frac{\exp(-t_2/\tau) - \exp(-t_1/\tau)}{t_2 - t_1}$$

ill.:

$$(42b) \quad z(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{t_1 + t_2}{2\tau}\right) \cdot \left[\frac{\exp\left(-\frac{t_2 - t_1}{2\tau}\right) - \exp\left(\frac{t_2 - t_1}{2\tau}\right)}{t_2 - t_1} \right].$$

Látható, hogy az átlagsebesség értéke mind t_1 , mind t_2 értékétől függ. Ha az átlagsebesség kiszámítására szolgáló időintervallum kicsi, nevezetesen $\left|\frac{t_2 - t_1}{2\tau}\right|$ egynél lényegesen kisebb, akkor mivel egynél abszolút értékben lényegesen kisebb x értékekre (lásd táblázat)

$$(43a) \quad \exp(x) \approx 1 + x, \quad \text{ha} \quad |x| \ll 1,$$

$$(43b) \quad \exp(-x) \approx 1 - x, \quad \text{ha} \quad |x| \ll 1,$$

írhatjuk, hogy $\left|\frac{t_2 - t_1}{2\tau}\right| \ll 1$ esetén

$$(44) \quad z(t_1, t_2) \approx \exp\left(-\frac{t_2 + t_1}{2\tau}\right) \cdot \left[\frac{\left(1 - \frac{t_2 - t_1}{2\tau}\right) - \left(1 + \frac{t_2 - t_1}{2\tau}\right)}{t_2 - t_1} \right],$$

és így

$$(45) \quad z(t_1, t_2) \approx -\frac{1}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{t_2 + t_1}{2\tau}\right), \quad \text{ha} \quad \left|\frac{t_2 - t_1}{2\tau}\right| \ll 1.$$

x	$\exp(x)$	$1 + x$	$\exp(-x)$	$1 - x$	relatív hiba
0,001	1,0010005	1,0010000	0,9990005	0,9990000	$5 \cdot 10^{-7}$
0,002	1,0020020	1,0020000	0,9980020	0,9980000	$5 \cdot 10^{-6}$
0,005	1,0050125	1,0050000	0,9950125	0,9950000	$1 \cdot 10^{-5}$
0,010	1,0100502	1,0100000	0,9900498	0,9900000	$5 \cdot 10^{-5}$
0,100	1,1051709	1,1000000	0,9048347	0,9000000	$5 \cdot 10^{-3}$

Láthatjuk tehát, hogy elegendően szűk időintervallumra számítva az átlagsebességet az csak a $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ időértéktől függ és így a (45) egyenlet a $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ időpillanathoz tartozó pillanatnyi sebességet szolgáltatja. Tehát:

$$(46) \quad y'(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot \exp(-t/\tau).$$

Tegyük fel, hogy a kondenzátoron levő töltés a

$$(47) \quad q(t) = Q_0 \cdot [1 - \exp(-t/\tau)] = Q_0 - Q_0 \exp(-t/\tau)$$

összefüggés szerint változik. (Feltesszük tehát, hogy a bekapcsolás pillanatában a kondenzátor nem volt feltöltve.) Felhasználva, hogy az áram a kondenzátoron levő töltés változásának sebességével egyenlő, azt nyerjük, hogy:

$$(48) \quad i(t) = q'(t) = \frac{Q_0}{\tau} \cdot \exp(-t/\tau)$$

(48) felírásánál felhasználtuk azt a két egyszerű tényt, hogy $y = z(t) + A$ és $x = z(t)$ függvények sebessége egyenlő, valamint azt, hogy ha $y = z(t)$ és $x = A \cdot z(t)$, akkor x sebessége $x' = A \cdot y'$. Itt A -val egy tetszőleges állandót jelöltünk. Ezen állítások igazsága az átlagsebesség kiszámítása útján könnyen belátható.

(39)-ből (47) és (48) felhasználásával azt kapjuk, hogy:

$$(49) \quad Q_0 \cdot \frac{R}{\tau} \cdot \exp(-t/\tau) + \frac{Q_0}{C} \cdot [1 - \exp(-t/\tau)] = U,$$

ha $t \geq 0$. Ez az egyenlet akkor teljesül, ha $t \geq 0$ esetén

$$(50a) \quad U = \frac{Q_0}{C}$$

és

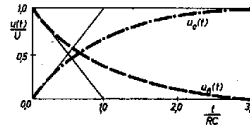
$$(50b) \quad \tau = R \cdot C.$$

Így a kondenzátoron, illetve az ellenálláson eső feszültség:

$$(51a) \quad u_C(t) = U \cdot [1 - \exp(-t/\tau)],$$

$$(51b) \quad u_R(t) = U \cdot \exp(-t/\tau).$$

$u_C(t)$ és $u_R(t)$ menetét a 6. ábra tünteti fel.



6. ábra

Az ábrából a τ időállandó jelentése is kitűnik; ez szabja meg a kondenzátor adott mértékű feltöltődéséhez szükséges időt.

Gyakorlásul számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt éri el a 100 V egyenfeszültségre kapcsolt 500 Ω ellenállású és 0,1 H önindukciójú fojtótekerces a $U/R = 0,2$ A határáramerősség 33, 66 és 99%-át.

Térjünk vissza most első példánkra: a váltófeszültségre kötött LRC láncre. (18), (24), (25) és (26) szerint a $t = 0$ pillanatban

$$(52a) \quad q(0) = \frac{U_0 R}{\omega \cdot \left[\left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2 \right]},$$

$$(52b) \quad i(0) = \frac{U_0 \cdot \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)}{\left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2}.$$

Ha a láncot a $t = 0$ pillanatban kötjük rá a feszültségre, akkor természetesen nem szükségszerű, hogy a kondenzátoron levő töltés éppen az (52a) által megadott érték legyen. Továbbá $i(0)$ értéke szükségképpen zérus kell, hogy legyen. Az L önindukció miatt ugyanis az áram nem tud a bekapcsolás előtti zérus értékről a bekapcsolás pillanatában valamely zérustól különböző értékre felugrani. Hogyan kell módosítanunk a (18) próbafüggvényt, ha a bekapcsolás jelenségét is le akarjuk írni; ha megköveteljük azt, hogy a próbafüggvény olyan legyen, hogy $i(0) = 0$ és $q(0) = \text{tetszőleges érték}$ a kezdeti (bekapcsolási) feltételeket teljesítse? Az olvasó (3)-ba való behelyettesítéssel meggyőződhetik arról, hogy ha a kondenzátor kezdeti töltése Q_K , akkor a kondenzátoron levő töltés időbeni változását

$$\left(\frac{R}{2L} \right)^2 > \frac{1}{LC} \text{ esetén a}$$

$$(53a) \quad q(t) = Q_0 \sin(\omega t - \varphi) + A \exp(-t/\tau_1) + (Q_K + Q_0 \sin \varphi - A) \cdot \exp(-t/\tau_2)$$

$$(53b) \quad 1/\tau_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad 1/\tau_2 = \frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC}};$$

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \quad \text{esetén a}$$

$$(53c) \quad q(t) = Q_0 \sin(\omega t - \varphi) - \frac{Q_K + Q_0 \sin \varphi}{\sin \alpha} \cdot \exp(-t/\tau) \cdot \sin(\Omega t - \alpha),$$

$$(53d) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2};$$

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{esetén a}$$

$$(53f) \quad q(t) = Q_0 \sin(\omega t - \varphi) + (Q_K + Q_0 \sin \varphi + At) \cdot e^{-t/\tau},$$

$$(53g) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L}$$

típusú próbafüggvénnyel lehet leírni. Az α , ill. A paraméter értékét abból a feltételből kell meghatároznunk, hogy $i(0) = 0$. A behelyettesítés, ill. az α és A paraméter értékének kiszámítása során fel kell használnunk, hogy

$$(54a) \quad x(t) = \exp(-Kt) \cdot \sin(\Omega t - \alpha),$$

$$(55a) \quad y(t) = \exp(-Kt) \cdot \cos(\Omega t - \alpha)$$

esetén

$$(54b) \quad x'(t) = -K \cdot \exp(-Kt) \cdot \sin(\Omega t - \alpha) + \exp(-Kt) \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t - \alpha),$$

$$(55b) \quad y'(t) = -K \cdot \exp(-Kt) \cdot \cos(\Omega t - \alpha) - \exp(-Kt) \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t - \alpha);$$

illetve:

$$(56a) \quad x(t) = y(t) + z(t)$$

és

$$(57a) \quad u(t) = t \cdot \exp(-Kt)$$

esetén

$$(56b) \quad x'(t) = y'(t) + z'(t)$$

és

$$(57b) \quad u'(t) = (1 - Kt) \cdot \exp(-Kt).$$

Látható, hogy az (53) próbafüggvények a (18) próbafüggvénybe mennek át, ha $t \gg \tau_{\max}$. A bekapcsolás után elég hosszú idővel tehát szinuszosan változó áram- és feszültségviszonyokkal számolhatunk.

Az (53) próbafüggvények a (3) egyenlet minden fizikai szempontból szóbaeső megoldását megadják, hiszen segítségével követni tudjuk az áram- és feszültségviszonyok alakulását bármely lehetséges bekapcsolási állapot esetén. Ezen túlmenően még azt is meg lehet mutatni, hogy (3)-nak nincsenek (53)-tól különböző megoldásai.

Meg lehet mutatni, hogy a váltóáramú áramkörti egyenletek mindig megoldhatóak elegendően sok $A \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, $A \cdot t \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, $A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ és $A \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot \sin(\Omega t - \alpha)$ függvény illesztésével, ha áramkörünket szinuszos váltóáramra kapcsoljuk. Az exponenciális kifejezések a bekapcsolás után elegendően hosszú idővel jelentéktelenné válnak; az áramkör stacionárius viszonyait a tiszta szinuszos tagok írják le.