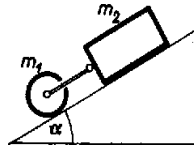
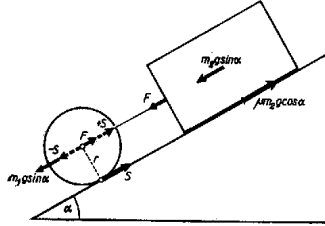


1. feladat. 30° -os hajlásszögű lejtőn $m_1 = 8$ kg tömegű, 10 cm átmérőjű tömör henger tengelyéhez hozzá van kötve fonállal $m_2 = 4$ kg tömegű tégl. (1. ábra.) Mekkora gyorsulással mozognak? A súrlódási együttható a tégl. és a lejtő között $\mu = 0,2$. A gördülő ellenállás és a csapágy súrlódása elhanyagolandó.



1. ábra

I. megoldás. A henger alján S súrlódási erő működik (2. ábra).



2. ábra

A fonál F erővel húzza egymáshoz a hengert és a téglát. A henger középpontjában $m_1 g \sin \alpha$, a tégl. középpontjában $m_2 g \sin \alpha$ mozgató erő, a tégl. alján $\mu m_2 g \cos \alpha$ súrlódási erő működik (mert a tégl. mozog). Az erők a rajz szerinti irányítások mellett pozitívak.

A tégl. a gyorsulású egyenletesen gyorsuló mozgással mozog; Newton II. törvénye szerint:

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha + F - \mu m_2 g \cos \alpha.$$

A henger középpontjában hozzáveszünk $\pm S$ erőt. A henger középpontjának haladó mozgására igaz:

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - F - S.$$

Az I tehetetlenségi nyomatékú henger a/r szöggyorsulással mozog; ez a szöggyorsulás egyenlő a forgatónyomaték és a tehetetlenségi nyomaték hányadosával:

$$\frac{a}{r} = \frac{Sr}{I}.$$

Három egyenletünk egyenletrendszeret alkot, amelyet a -ra, S -re, F -re megoldva ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} (1) \quad a &= g \cdot \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2 + I/r^2}, \\ (2) \quad S &= \frac{I}{r^2} \cdot g \cdot \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2 + I/r^2} \\ (3) \quad F &= m_2 g \cdot \frac{\mu(m_1 + I/r^2) \cos \alpha - I \sin \alpha / r^2}{m_1 + m_2 + I/r^2} \end{aligned}$$

Ha homogén hengerről van szó, akkor $I = m_1 r^2 / 2$ és eredményeink:

$$\begin{aligned} (1') \quad a &= \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha}{1,5 m_1 + m_2} \cdot g, \\ (2') \quad S &= \frac{m_1 g}{2} \cdot \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha}{1,5 m_1 + m_2} \\ (3') \quad F &= m_2 g \cdot \frac{(1,5 \mu \cos \alpha - 0,5 \sin \alpha) m_1}{1,5 m_1 + m_2} \end{aligned}$$

A feladatban szereplő számadatokkal:

$$\begin{aligned} (1'') \quad a &= 0,3317g = 3,252 \text{ m/s}^2, \\ (2'') \quad S &= 1,327 \text{ kp} = 13,005 \text{ newton}, \\ (3'') \quad F &= 0,020 \text{ kp} = 0,196 \text{ newton}. \end{aligned}$$

II. megoldás. A szerkezet valamilyen a gyorsulással mozog és t idő alatt $at^2/2$ utat tesz meg a lejtő mentén. Ez alatt a helyzeti energia csökkenése: $(m_1 + m_2)gat^2 \sin \alpha/2$. A haladásból származó összes mozgási energia: $(m_1 + m_2)(at)^2/2$, a forgásból származó mozgási energia: $I\omega^2/2 = Iv^2/2r^2 = I(at)^2/2r^2$ (ω a szögsebesség, $r\omega = v = at$ a kerületi sebesség). A súrlódási munka $\mu m_2 g \cos \alpha \cdot \frac{a}{2} t^2$. A mechanikai energiamegmaradás tétele szerint:

$$(m_1 + m_2)g \cdot \frac{a}{2} \cdot t^2 \sin \alpha = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot a^2 t^2 + \frac{I}{2r^2} \cdot a^2 t^2 + \mu m_2 g \cos \alpha \cdot \frac{a}{2} \cdot t^2.$$

Ennek megoldása a -ra az (1) alatti eredményt adja.

Mojmír SIMERSKÝ (Csehszlovákia)

Taglalás. Vizsgáljuk meg, mikor indul el az összekötött szerkezet. Az elindulás feltétele, hogy $a > 0$ legyen. A határesetben (1) alapján:

$$(m_1 + m_2) \sin \alpha_1 - \mu m_2 \cos \alpha_1 = 0.$$

Innen az elindulás határesetének feltétele:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \mu \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

A mi esetünkben $\operatorname{tg} \alpha_1 = \mu/3 = 0,0667$, $\alpha_1 = 3,82^\circ$. (Külön a hengernél $\alpha_1 = 0^\circ$, külön a téglánál $\alpha_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu = 11,31^\circ$ lett volna az elindulás határhelyzete; a henger mintegy lehúzza a téglát.)

Az 1. feladatra mindeddig elmondottak csak akkor igazak, ha F pozitív, mert negatív F fonálerő nyomó igénybevételt jelentene, erre pedig a fonál nem képes. A határeset feltételét megkapjuk, ha F (3) szerinti értékét 0-val tesszük egyenlővé:

$$\mu(m_1 + I/r^2) \cos \alpha_2 - I \sin \alpha_2 / r^2 = 0.$$

Innen a fonál feszességének feltétele:

$$(4) \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \mu \left(1 + \frac{m_1 r^2}{I} \right);$$

hengernél:

$$(4') \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = 3\mu,$$

illetve számadatainkkal:

$$(4'') \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = 0,6, \quad \alpha_2 = 30,96^\circ.$$

Feladatunkban majdnem elértük ezt a szöget, ezért olyan kicsiny a fonálerő.

Előfordulhat, hogy a henger megcsúszik. Ennek feltétele, hogy S elérje a lehetséges legnagyobb súrlódási erőt, $\mu m_1 g \cos \alpha_3$ -at. (Feltesszük, hogy a hengerre és a téglára a csúszási súrlódási együttható azonos.) (2) alapján:

$$\frac{I}{r^2} \cdot g \cdot \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha_3 - \mu m_2 \cos \alpha_3}{m_1 + m_2 + I/r^2} = \mu m_1 g \cos \alpha_3.$$

Innen a határeset feltétele:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \mu \left(1 + \frac{m_1 r^2}{I} \right).$$

Ez érdekes módon egyezik a fonálfeszesség (4) alatti feltételével, tehát $\alpha_2 = \alpha_3$. E szög túllépése után megszűnik a fonálerő és a két test egymástól függetlenül mozog: a téglát csúszik, a henger forog és csúszik. (Ha a fonalat súlytalan pálcával pótolnánk, ebben nem jönne létre erő.)

Ha a lejtő meredeksége $\alpha_2 = \alpha_3$ -nál nagyobb, akkor a téglát és a henger középpontjának gyorsulása:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

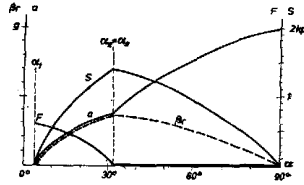
a henger alján működő súrlódási erő:

$$S = \mu m_1 g \cos \alpha,$$

a forgás szöggyorsulása β és kerületi gyorsulása:

$$\beta r = \mu \frac{m_1 r^2}{I} \cdot g \cos \alpha.$$

A 3. ábra mutatja a mozgás adatainak α -tól való függését feladatunk számadatai mellett.



3. ábra

TAKÁCS László (Magyarország)

2. feladat. Egyik pohárban 300 cm^3 0°C hőmérsékletű toluol, egy másik pohárban 110 cm^3 100°C hőmérsékletű toluol van. (Térfogatösszegük tehát 410 cm^3 .) Mennyi lesz az együttes térfogat, ha ezt a két folyadékot összeöntjük? A toluol köbös hőtágulási együtthatója $0,001 \text{ fok}^{-1}$. Minden hőveszteségtől tekintünk el.

Megoldás. A 110 cm^3 100° -os toluol térfogata 0° -on (β hőkiterjedési együttható megadott számértékével vissza-számolva) 100 cm^3 . Így a tömegek aránya $3 : 1$ és a keverés utáni hőmérséklet 25°C . A 400 cm^3 0° -os toluolnak 25° -on 410 cm^3 térfogata van. Az összeöntés által nem változott az összes térfogat. Felmerül az a gyanú, hogy ez szükségképp van így, nem véletlenség. Vizsgáljuk meg.

Ugyanazon folyadékból az egyik résznek t_1 fokon V_1 , a másik résznek t_2 fokon V_2 a térfogata. A 0° -ra visszaszámolt térfogatok: $V_{10} = V_1/(1 + \beta t_1)$, $V_{20} = V_2/(1 + \beta t_2)$. Ha 0° -on a sűrűség d , akkor a tömegek $m_1 = V_{10}d$ és $m_2 = V_{20}d$. Az összekeverés utáni hőmérséklet:

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}.$$

Ezen a hőmérsékleten a térfogatok $V_{10}(1 + \beta t)$ és $V_{20}(1 + \beta t)$.

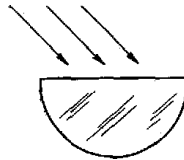
Számítsuk ki a térfogatösszeget:

$$\begin{aligned} V_{10}(1 + \beta t) + V_{20}(1 + \beta t) &= V_{10} + V_{20} + \beta(V_{10} + V_{20})t = \\ &= V_{10} + V_{20} + \beta \cdot \frac{m_1 + m_2}{d} \cdot \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \\ &= V_{10} + V_{20} + \beta(m_1 t_1/d + m_2 t_2/d) = V_{10} + \beta V_{10} t_1 + V_{20} + \beta V_{20} t_2 = \\ &= V_{10}(1 + \beta t_1) + V_{20}(1 + \beta t_2) = V_1 + V_2. \end{aligned}$$

Tehát a térfogatösszegnek állandónak kell maradnia. Több pohár esetében is így van, hiszen összeönthetünk először kettőt, ehhez a harmadikat és így tovább.

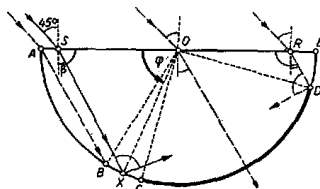
Peter GEORGIEV (Bulgária)

3. feladat. $\sqrt{2}$ törésmutatójú üvegből fél henger készült. (4. ábra). Az üveg sík felületére 45° -os beesési szögben fénysugarakat bocsátunk. A fénysugarak a tengelyre merőleges metszet síkjában fekszenek. A henger palástjának mely részén lépnek ki fénysugarak?



4. ábra

Megoldás. Jellemezzük a fénysugár helyzetét a φ szöggel (5. ábra).



5. ábra

A töréstörvény alapján:

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin \beta} = \sqrt{2}, \quad \sin \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta = 30^\circ.$$

A törési szög az üvegben haladó valamennyi megtört fénysugárra nézve 30° . (A törésmutató $n = \sqrt{2}$.)

Azonnal látjuk, hogy $\varphi = 60^\circ$ alatt geometriai okból nem érkezik fénysugár a hengerpalást belső felszínére.

A teljes visszaverődés határszöge β_t ; erre nézve:

$$\sin \beta_t = \frac{1}{n} = \sqrt{2}, \quad \beta_t = 45^\circ.$$

Minden fénysugár esetében $OSX \leq 60^\circ$. A teljes visszaverődés esetében $SXO \leq 45^\circ$, tehát $\varphi = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$ az az érték, ameddig a palástot BC íven elérő fénysugarak teljesen visszaverődnek és nem lépnek ki. Amikor φ nagyobb lesz 75° -nál, kilép fénysugár a hengerpaláston.

Tovább haladva újból elérjük a teljes visszaverődés határesetét, amikor $ODR \leq$ egyenlő lesz 45° -kal. $ORD \leq 120^\circ$, így $ROD \leq 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Eszerint újból teljes visszaverődés kezdődik $\varphi = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$ -tól felfelé.

A hengerpaláston akkor lép ki fénysugár, amikor:

$$75^\circ < \varphi < 165^\circ$$

A kilépő sugarak CD ívéhez éppen 90° -os középponti szög tartozik.

Ki lehet mutatni, hogy a BC és DE ívhez tartozó, a paláston teljesen visszaverődő fénysugarak úgy érik el a felső sík lapot, hogy ott nem következik be teljes visszaverődés, tehát nem kell attól tartanunk, hogy ilyen teljesen visszaverődött sugarak valahol a hengerpalást egyéb részén kilépnek.

Emil MATEJEV (Bulgária)

Kísérleti feladat. Minden résztvevő három lezárt dobozt kapott, két áramkivezetéssel. Megállapítandó a doboz felnyitása nélkül, hogy milyen áramköri elemek vannak a dobozban és ezek elektromos jellemzőit meg kell mérni. Rendelkezésre áll két „Univo” amper-voltmérő megadott mérési területekkel és belső ellenállásokkal, továbbá 10 voltos nagyságrendű egyenáramú, illetve 50-es frekvenciájú váltóáramú feszültségforrás. A műszerek egyenáramú mérés esetében 2%, váltóáramú mérés esetében 3% pontosságúak.

Megoldás. „A mérés megkezdése előtt meggyőződtem arról, hogy az egyes dobozok kapcsain nem mérhető saját feszültség.

I. doboz. Ohm törvénye alapján megmértem az ellenállást egyenárammal (700 ohm $\pm 4\%$) és váltóárammal (2200 ohm $\pm 6\%$). Tehát a doboz sorba kapcsolt ellenállást és induktivitást tartalmaz. Ohmos ellenállása 700 ohm. Induktív ellenállása $\sqrt{2200^2 - 700^2} = 2070$ ohm $\pm 8\%$, eszerint önindukciója $L = 2070 : 314 = 6,6$ henry $\pm 8\%$.

II. doboz. Az egyenáramú és váltóáramú mérés a hibahatárokon belül 3700 ohmot adott, tehát igen valószínű, hogy ekkora ohmos ellenállás van a dobozban.

III. doboz. Az egyenáramú mérés 30 000 ohm ellenállást adott. Mivel a dobozzal párhuzamos kapcsolásban használtam kb. 30 000 ohm ellenállású voltmérőt, nyilvánvaló, hogy a doboz saját ohmos ellenállása ennél sokkal nagyobb, gyakorlatilag elhanyagolható.

A váltóáramú mérés 6600 ohm $\pm 6\%$ ellenállást adott. Tehát kondenzátorról van szó. Ennek kapacitása a 6600 ohm kapacitív ellenállásból számítva $C = 4,9 \mu F \pm 6\%$.”

MIHÁLY László (Magyarország)