

Az I. forduló feladatai

1. $m_1 = 0,2$ kg-os vaslemezre vákuumban, hőszigetelő tartályban, $h = 1$ m magasból $m_2 = 0,3$ kg-os vörösrézgolyó esik. Az ütközés részben rugalmas. Az ütközés előtt a testek egyenlő hőmérsékletűek. Mennyivel emelkedik a hőmérséklet az ütközés folytán? A vas fajhője $0,11$ kcal/(kg·fok), a vörösréz fajhője $0,092$ kcal/(kg·fok).

(Soós Károly)

Megoldás. A vörösrézgolyó leesésekor $0,3$ mkp munkát végez, az ebből származó hőmennyiség $0,3$ mkp : 427 mkp/kcal = $0,000703$ kcal. Ez melegíti fel a két fémtárgyat:

$$0,000703 = 0,11 \cdot 0,2 \cdot \Delta t + 0,092 \cdot 0,3 \cdot \Delta t.$$

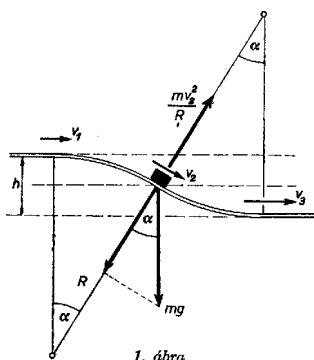
Innen a felmelegedés: $\Delta t = 0,0142$ °C.

Mivel az ütközés csak részben rugalmas, a vörösrézgolyó előbb–utóbb megáll és összes helyzeti energiája hővé lesz. A jó hővezetés folytán a fémek ugyanolyan hőfokúak lesznek. Mivel az esés légüres térben megy végbe, a levegő nem részesül súrlódás folytán (egyébként is elenyészően kevés) hőmennyiségben.

2. Két vízszintes pályát két egyenlő, $R = 5$ m rádiuszú körívből álló lejtő köt össze. A vízszintes pályák és a körívek függőleges síkban vannak és törés nélkül csatlakoznak egymáshoz. A vízszintes pályák magasságkülönbsége $h = 2$ m. Egy test súrlódás nélküli csúszással halad a felső pályáról az alsóra. Mekkora az a legnagyobb kezdősebesség, amely mellett mozgása közben mindvégig érintkezésben marad a lejtővel?

(Wiedemann László)

A lejtő tetején v_1 , közepén v_2 és alján v_3 a sebesség (1. ábra).



1. ábra

Ezek között az energiamegmaradás törvénye ad kapcsolatot:

$$\frac{mgh}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad \frac{mgh}{2} = \frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2},$$

vagyis

$$v_2^2 = v_1^2 + gh,$$

(1)

$$v_3^2 = v_2^2 + gh = v_1^2 + 2gh.$$

Tehát a három sebesség közül bármelyiket ismerve a másik kettő kiszámítható.

A test akkor hagyja el a lejtőt, ha az mv^2/R centrifugális erő egyenlő lesz az mg súly rádiusz irányába eső $mg \cos \alpha$ összetevőjével. Lerepülés csak a felülről nézve domború részen következhet be és ezen az előbbi állításunk szerint annál veszélyesebb a helyzet, minél lejjebb megyünk. A legveszélyesebb hely tehát a lejtők találkozási pontja, ezért erre nézve kell felírunk a lejtőn maradás határesetének feltételét:

$$\frac{mv_2^2}{R} = mg \cos \alpha.$$

A rajzból látszik, hogy $\cos \alpha = (R - h/2) : R = 1 - h/2R$. Tehát v_2 számára a megengedett legnagyobb érték:

$$v_2 = \sqrt{gR(1 - h/2R)}.$$

(1) alapján átszámítva az a legnagyobb sebesség, amellyel a golyót fent nekiguríthatjuk a lejtőnek:

$$v_1 = \sqrt{gR(1 - 3h/2R)}$$

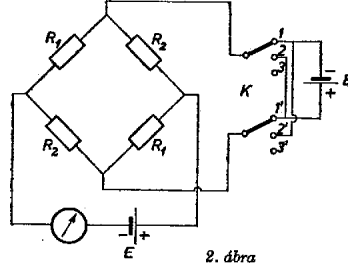
és az a legnagyobb sebesség, amellyel lenn megérkezhet:

$$v_3 = \sqrt{gR(1 + h/2R)}.$$

Feladatunk számadataival $v_1 = 4,43$ m/s, $v_2 = 6,26$ m/s, $v_3 = 7,67$ m/s.

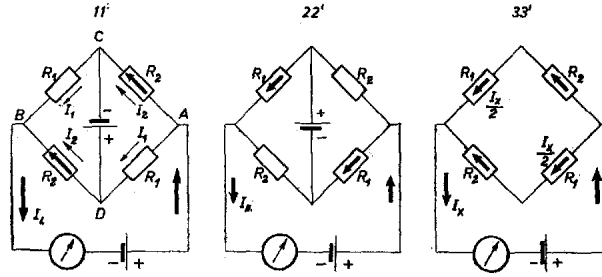
3. A 2. ábrán látható áramkörben a K kettős kapcsoló $11'$ állásnál $I_I = 6$ amper, $22'$ állásnál $I_{II} = 3$ amper áramerősséget mutat az ampermérő. Mennyit mutat az ampermérő a kapcsoló $33'$ állásánál? A két telep E elektromotoros ereje egyenlő, belső ellenállásuk, valamint az ampermérő belső ellenállása elhanyagolható.

(Bodó Zalán)



2. ábra

Megoldás. Rajzoljuk át a kapcsolást a három kapcsolóállás esetére (3. ábra).



3. ábra

Az $11'$ esetben feltételezzük, hogy az ellenállásokon I_1 és I_2 áramok folynak. A feszültségesés A és B között:

$$E = R_2 I_2 + R_1 I_1.$$

A feszültségesés D és C között:

$$E = R_2 I_2 - R_1 I_1.$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $I_1 = 0$, $I_2 = E/R_2$. Az $I_1 = I_2 = 6$ amper A -tól C -ig folyik, azután átmegy a belső elemen, majd D -től B -ig folyik. R_1 ellenállások árammentesek. Az R_2 nagysága:

$$(2) \quad R_2 = \frac{E}{I_1}.$$

Hasonlóan a $22'$ kapcsolóállásban csak R_1 ellenállásokon folyik áram, $I_{II} = E/R_1 = 3$ amper és

$$(3) \quad R_1 = \frac{E}{I_{II}}$$

A $33'$ kapcsolóállásban mindegyik ágban egyformán $I_x/2$ áram folyik. Felírva az egyik ágra Ohm törvényét, (2) és (3) felhasználásával:

$$\frac{I_x}{2} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E}{E/I_{II} + E/I_1}.$$

Innen az ismeretlen áramerősség:

$$I_x = \frac{2I_1 I_{II}}{I_1 + I_{II}}.$$

Ez az eredeti áramerősségek harmonikus középértéke; a mi esetünkben $I_x = 4$ amper.

A II. forduló feladatai

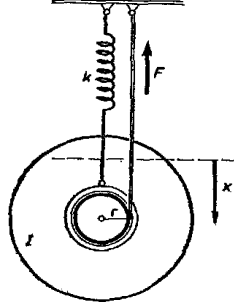
1. Egy korong középpontján a korong síkjára merőlegesen vízszintes tengelyt vezetünk át, melyet a koronghoz rögzítünk. Azután a tengely két végére fonalat tekerünk, a fonalak végeit függőlegesen a mennyezethez erősítjük, miközben a korongot nyugalomban tartjuk. A koronghoz képest szimmetrikusan a tengelyre súrlódásmentes gyűrűkkel egy-egy rugót erősítünk. A rugók másik végeit függőlegesen a mennyezethez rögzítjük. Ebben a helyzetben a rugó nincs megfeszítve.

Most a rendszert magára hagyjuk. Mennyi idő múlva éri el a korong legmélyebb helyzetét?

(Számadatok: a korong tömege $m = 2$ kg, tehetetlenségi nyomatéka a tengelyre vonatkozóan $I = 0,01$ kgm², a pálcza rádiusza $r = 2$ cm, egy-egy rugó állandója $k = 1,5$ newton/m, $g = 10$ m/s².)

(Wiedemann László)

Megoldás. Egy bizonyos idő múlva a korong tengelye x darabbal lejjebb kerül (4. ábra).



4. ábra

Ekkor a súlypont valamilyen a gyorsulással halad lefelé és a két fonál együttesen F rugalmas erővel húz felfelé. A haladó mozgást gyorsító erőt megkapjuk, ha a súlyból levonjuk a rugók és a fonalak felfelé húzó erejét:

$$(4) \quad ma = mg - 2kx - F.$$

A korong forgásának a/r szöggyorsulását megadja a fonálerő forgatónyomatékának és a tehetetlenségi nyomatéknak a hányadosa:

$$(5) \quad \frac{a}{r} = \frac{Fr}{I}.$$

Két egyenletből álló egyenletrendszerünket megoldva megkapjuk a gyorsulást és a fonálerőt, mint x útfüggvényét:

$$a = \frac{g}{1 + I/mr^2} - \frac{2k/m}{1 + I/mr^2} \cdot x,$$

$$F = \frac{I}{mr^2 + I} \cdot mg - \frac{I}{mr^2 + I} \cdot 2k \cdot x,$$

A gyorsulásnak az úttól való függését tanulmányozva észrevevesszük, hogy olyan rezgő mozgásról van szó, amely szélső helyzetéből indul. Az az x_0 távolság, amelynél a rezgés egyensúlyi helyzete áll be, az $a = 0$ állításból következően $x_0 = mg/2k$. A középpont rezgő mozgásának T_0 rezgésideje a rezgő mozgás gyorsulástörvényéből következően:

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{2k/m}{1 + I/mr^2},$$

innen

$$(6) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1 + I/mr^2}{2k/m}}.$$

Ennek negyedrésze, $T_0/4$ az az idő, amely alatt a pörgő kerék az x_0 mélységet eléri.

Az x_0 -nál mélyebbre süllyedve megváltozik a mozgás jellege, ugyanis most megváltozik F fonálerő előjele. De a fonál nem adhat át tolóerőt. A (4) egyenletből el kell hagyni F -et és innen kezdve egyszerűen egy rugóra akasztott tömeg le-fel rezgéséről van szó. Igaz, hogy a rezgő tömeg egy változatlan szögsebességgel pörgő korong, amely legombolyítja szüntelenül a fonalat a tengelyről, amennyiben a fonál elég hosszú. Ennek a mozgásnak a rezgésideje (6)-ból I elhagyásával:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

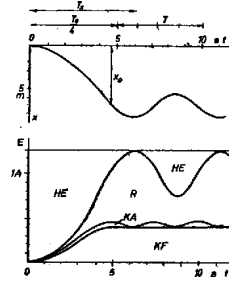
Ennek negyedrészt hozzáadva $T_0/4$ -hez kapjuk a legmélyebb helyzet elérésének idejét:

$$T_x = \frac{T_0}{4} + \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1 + I/mr^2}{2k/m}} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}},$$

Számadatainkkal $T_x = 4,71 \text{ s} + 1,28 \text{ s} = 5,99 \text{ s}$. A középhelyzet mélysége $x_0 = 6,67 \text{ m}$, az ezután bekövetkező további süllyedés:

$$\frac{mg}{2k} \cdot \sqrt{\frac{mr^2}{I + mr^2}} = 1,81 \text{ méter}$$

így a korong legnagyobb mélysége $6,67 \text{ m} + 1,81 \text{ m} = 8,48 \text{ m}$.



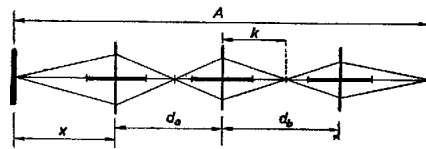
5. ábra

Az 5. ábra felső része a korong mélységét mutatja, mint az idő függvényét. Az ábra alsó részén a mechanikai energiák alakulását látjuk $A = m^2 g^2 / 2k = 133$ joule egységeiben kifejezve. Induláskor csak helyzeti energia van (**HE**). Lepörgéskor ebből a forgó mozgás kinetikus energiája (**KF**), a haladó mozgás kinetikus energiája (**KH**) és a rugóban felraktározott rugalmas energia (**R**) lesz. $T_0/4$ után (**KF**) változatlanul megmarad és az energia többi részén osztoznak (**HE**), (**KH**) és (**R**).

2. Három egyforma, f fókusz távolságú lencsénk van. Ezeket d_a és d_b távolságokban elhelyezve lencserendszert állítunk össze. Ezzel a lencserendszerrel egy tárgyról a tőle A távolságban levő ernyőn képet állítunk elő. Lencserendszerünket az optikai tengely mentén ide-oda tolva a képalkotás változatlanul éles marad. Az adatok milyen értékei mellett lehetséges ez?

(Bodó Zsolt)

Megoldás. Lencserendszerünket úgy helyezzük el, hogy az első lencse a tárgytól x távolságra legyen (6. ábra).



6. ábra

A tárgyról az első lencse a leképezési törvény alapján $xf/(x-f)$ távolságban ad éles képet, amely a második lencsétől $d_a - xf/(x-f)$ távolságban van. Ismét a lencsetörvénnyel az első lencse által adott képről a második lencse tőle k távolságra ad képet:

$$(7) \quad k = \frac{f[d_a - xf/(x-f)]}{d_a - f - xf/(x-f)}.$$

Ennek a távolsága a harmadik lencsétől $d_b - k$ és a harmadik lencse által adott kép képtávolsága $(d_b - k)f/(d_b - f - k)$. A tárgy és kép A távolságát megkapjuk, ha ezt, x -et és $d_a + d_b$ -t összeadjuk:

$$A = x + d_a + d_b + \frac{(d_b - k)f}{d_b - f - k}.$$

Itt k helyett felhasználandó a (7) szerinti kifejezés. Azonos átalakítások után:

$$(8) \quad A = d_a + d_b + \frac{[d_a d_b - 2(d_a + d_b)f + 3f^2]x^2 + f^2(d_a - d_b)x + f^2[(d_a + d_b)f - d_a d_b]}{[d_a d_b - 2(d_a + d_b)f + 3f^2]x + f[d_a f - (d_a - f)(d_b - f)]}.$$

A feladat kívánságának akkor tettünk eleget, ha A ezen értéke független x -től. Ez akkor következik be, ha x együtthatói nullák. Először is a számlálóban x együtthatójának kell 0-nak lennie:

$$f^2(d_a - d_b) = 0.$$

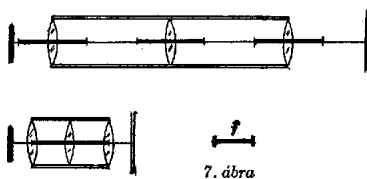
Ebből következően $d_a = d_b = d$. Tehát a lencsék közötti távolságoknak egyenlőknek kell lennie. Ezt (8)-ban felhasználva:

$$(9) \quad A = 2d + \frac{[d^2 - 4fd + 3f^2]x^2 + f^2d[2f - d]}{[d^2 - 4fd + 3f^2]x + f[-f^2 + 3df - d^2]}.$$

x^2 , illetve x együtthatóját is nullával tesszük egyenlővé:

$$d^2 - 4fd + 3f^2 = 0$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai: $d_I = 3f$, $d_{II} = f$. Ezeket (9)-ben felhasználva $A_I = 9f$, $A_{II} = 3f$. Tehát két megoldás van (7. ábra).



Az egyik esetben a lencsék távolsága a fókusz-távolság 3-szorosa és a tárgy-kép távolság a fókusz-távolság 9-szerese. A másik esetben a lencsék távolsága fókusz-távolságnyi és a tárgy-kép távolság a fókusz-távolság 3-szorosa. A lencse-rendszer mindegyik esetben teleszkopikus: belépő párhuzamos sugárnyaláb mint párhuzamos nyaláb távozik. A tárgy és a kép mindegyik esetben azonos nagyságú, az első esetben egyenes, a másodikban fordított állású.

3. Két U feszültségű feszültségforrást sorbakapcsolunk és szintén U feszültségű feszültségforrást kapunk. Lehetséges-e ez?

(Nagy Elemér)

Megoldás. Két váltakozó feszültségről van szó, amelyek amplitúdója egyenlő, de 120° -os fáziskülönbségben vannak egymáshoz képest. Kísérletileg megoldható, ha két egyforma transzformátor primer oldalait a háromfázisú hálózat két különböző fázisára kapcsoljuk és a szekunder oldalakat sorba kapcsoljuk. Ekkor mindegy, hogy a szekunder oldalon egy vagy két transzformátorról vesszük-e le a feszültséget.

Az 1968. évi tulkai tanulmányi verseny eredménye:

I. díj: Marossy Ferenc (Budapest, Fazekas M. g. IV. o. t.).

II. díj: Takács László (Sopron, Széchenyi g. IV. o. t.).

III. díj: Andor László (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.).

A további helyezetttek: 4. Nagy Zsigmond (Budapest, Kaffka M. g. IV. o. t.), 5. Woynarovich Ferenc (Budapest, Piarista g. IV. o. t.), 6. Járai Antal (Debreen, Vegyipari techn. IV. o. t.), 7. Várhelyi Ferenc (Budapest, Fazekas M. g. IV. o. t.), 8. D. Tóth Balázs (Debrecen, Kossuth g. IV. o. t.), 9. Gratzl Miklós (Pannonhalma, Bencés g. IV. o. t.), 10. Diósi Lajos (Budapest, Apáczai Csere g. IV. o. t.).