

A Bolyai János Matematikai Társulat a szokásos Arany Dániel tanulmányversenyeket ez évben is a *Művelődésügyi Minisztérium* támogatásával rendezte. Az I. forduló február 29-én, a II. forduló május 3-án voltak, mindkét alkalommal 4 órai munkaidővel. A múlt évi kezdeményezést folytatva ebben az évben is az I. fordulóból mindkét korcsoport versenyzői 15–15 feladat közül tetszés szerint választott feladatok megoldása alapján juthattak be a II. fordulóra. Minden egyes versenyző sokszorosítva kézbe kapta a 15 feladat szövegét, valamint azt, hogy az egyes feladatok teljes megoldásával hány pont érhető el. A II. fordulókban a szokás szerint ezidén is 3–3 feladat volt kitéve, külön-külön az általános tantervű osztályok versenyzői, illetőleg a szakosított tantervű matematikai osztályok versenyzői részére. A szakosított tantervű matematika–fizika osztályok tanulói az általános tantervű osztályok versenyében vettek részt, azonban a három feladat közül egyik helyett külön feladatot kellett kidolgozniuk.

A *Versenyzőbizottság* az I. forduló alapján a II. fordulóra a kezdők korcsoportjában 124, a haladók korcsoportjában 122 versenyzőt hívott be, közülük 30, illetőleg 43 volt valamelyik szakosított tantervű matematikai osztály tanulója, és 41, illetőleg 25 volt matematika–fizika osztálybeli.

A versenyek tételei

I. forduló, kezdők részére. 1. Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezést:

$$K = \left(\frac{a+2b}{a-2b} - \frac{a-2b}{a+2b} \right) : \left(\frac{a-2b}{a+2b} + 1 \right).$$

Határozzuk meg K értékét, ha $a = 3,5$, $b = -1,5$; továbbá ha $a = 3$, $b = -1,5$.

2. Egy négyzet és egy rombusz oldalai egyenlők. A rombusz hegyesszőge 30° . Hányad része a rombusz területe a négyzet területének?

3. Az x mely értékeire igaz a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{x+2}{x-3} > \frac{x-2}{x+4}.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan kétjegyű szám, amely egyenlő számjegyeinek szorzatával.

5. Bizonyítsuk be, hogy merőleges szárú szögek szögfelezői vagy párhuzamosak, vagy merőlegesek egymásra.

6. Két egyenlő magasságú gyertyát egyszerre gyújtunk meg. Az első 4 óra alatt, a második 3 óra alatt ég el. Hány óra múlva lesz az első gyertya-csonk kétszer olyan magas, mint a második, ha a gyertyák magassága egyenletesen csökken?

7. Az ABC háromszög AB és AC oldalait hosszabbítsuk meg a B , illetőleg C csúcson túl. Rajzoljuk meg a meghosszabbításokat és a BC oldalt érintő kört, legyen O ennek a középpontja. Bizonyítsuk be, hogy a BOC nagysága csak a BAC nagyságától függ.

8. Az m paraméter mely értéke mellett lehet a $4x^2 - 6x + m$ kifejezésből $(x-3)$ -at kiemelni?

9. Egy autóbusz 30 perc alatt teszi meg a végállomások közti utat. A végállomásról 2 percnként indítanak buszokat. Egy busszal egyidőben elindul egy autó az egyik végállomásról. Az autó sebessége négyszer akkora, mint a busz sebessége. Hány autóbuszt előz meg az autó a másik végállomásig?

10. Az ABC háromszögben $AC = BC$. Rajzoljunk a BC oldalra kifelé egy $BCDE$ négyzetet. Határozzuk meg a BAD nagyságát a háromszög szögeinek felhasználásával.

11. A-ból B-be 4 turistaút vezet: piros, sárga, kék és zöld jelzésű. B-ből C-be 2 turistaút vezet: piros és kék, C-ből D-be pedig 3 turistaút visz: piros, sárga és zöld. – a) Hányféleképpen járhatjuk be az $ABCD$ útvonalat? b) Hányféleképpen járhatjuk be az $ABCD$ útvonalat úgy, hogy a középső szakaszon más színű jelzésen haladunk, mint előtte és utána?

12. Az A városból két autó indult el egyidőben az A-tól 120 km-re fekvő B városba. Az első autó 40 km/óra, a második 30 km/óra sebességgel haladt. Az első autó útközben a C faluban 1 órára megállt, B-ben 1 órát állt, majd visszaindult. A második autó csak B-ben állt meg 0,5 órára, azután visszaindult A-ba. Állapítsuk meg, hogy az oda-vissza út folyamán hol találkozott egymással a két autó.

13. Szerkesszük meg az $ABCD$ trapézt, ha adott az $AB + CD = d$ és az $AC = e$ szakasz, továbbá az $ABD = \varepsilon$ és a $DAB = \alpha$ szög. (AB és CD a trapéz alapjai.)

14. Tűzzünk ki a síkon 9 pontot úgy, hogy közülük bármely három ne legyen egy egyenesen. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyeknek csúcsait az adott pontok közül választottuk ki. Bizonyítsuk be, hogy – bárhogyan is húzunk a síkon két egyenest – mindig lesz olyan háromszög, amelynek oldalait egyik egyenes sem metszi.

15. Egy 12 dm hosszúságú drótból egy 1 dm oldalélű kocka élvázát kell elkészítenünk. Legfeljebb hány kockaélet tudunk elkészíteni úgy, hogy közben nem vágjuk el a drótot?

Elérhető pontszám – a haladó korcsoportban is – a feladat teljes megoldása esetén: az 1–7. feladatban 6 pont, a 8–12. feladatban 8 pont, a 13–15. feladatban 10 pont volt. Részmegoldásért a töredéknek megfelelően kaptak pontot a versenyzők.

I. forduló, haladók részére. 1. Egy társaság közösen vásárolt egy ajándéktárgyat, azonban a számla kiegyenlítésekor négyen hiányoztak, és ezért mindenki 36 forinttal többet fizetett be a tervezettnél. Ezután három távollevő megérkezett, és a költségek újrafelosztása után a befizetők visszakaptak egyenként 30 forintot. Hányan voltak a társaságban, és mennyibe került az ajándéktárgy?

2. Két kör az E pontban kívülről érintkezik. Egy az E -n átmenő egyenes a köröket még A -ban, illetőleg B -ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy az A -n és B -n átmenő és A -ban az első kört érintő kör sugara egyenlő az adott körök sugarainak összegével.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha öt egymás után következő természetes szám közül a negyedik törzsszám, akkor az öt szám szorzata osztható 240-nel.

4. Az AB átmérőjű félkörív felezőpontja C , egy további pontja D , ennek a merőleges vetülete AB -n az E pont. Bizonyítandó, hogy $AC^2 = CE^2 + DE^2$.

5. Két kocka közül az egyiknek a felszíne $p\%$ -kal kevesebb, mint a másiké. Hány $\%$ -kal kevesebb az előbbi kocka térfogata, mint az utóbbié?

6. Egy szabályos hatoldalú gúla két szomszédos oldaléle 30° -os szöget zár be. Mekkora az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge?

7. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.

$$A = \frac{a^4 - b^4}{a^3b + ab^3} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}.$$

8. Az a , b és c pozitív számok szorzata 1. Számítsuk ki a következő kifejezés értékét.

$$S = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ca + c + 1}.$$

9. Döntsük el a következő kifejezés előjelét.

$$N = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

10. Adott két pont és egy kör. Szerkesszünk oly paralelogrammát, melynek két csúcsa a két adott pont, másik két csúcsa pedig az adott körön fekszik.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$xy = a^2b + ab^2, \quad x^2 - xy + y^2 = a^3 + b^3 \quad \text{és} \quad a \neq \pm b,$$

akkor

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

12. Két pontszerű test ugyanazon a körpályán kering ugyanabban az irányban; sebességük aránya $6 : 10$. Valamely időpontban találkoznak a körpálya bizonyos pontjában. Ugyanebben a pontban a legutóbbi találkozás 3 perccel azelőtt volt. Számítsuk ki a testek keringési idejét.

13. Mutassuk meg, hogy a derékszögű háromszögbe írható kör sugara kisebb a hosszabbik befogó háromtized részénél.

14. Állapítsuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenletben a gyökök négyzetösszege a lehető legkisebb legyen.

$$x^2 + (3p - 2)x - (7p + 1) = 0.$$

15. Egy az $ABCD$ paralelogramma D csúcsán átmenő egyenes a BA egyenest az E pontban, a BC egyenest F -ben metszi. Egy a B csúcson átmenő egyenes pedig DA -t a G pontban, DC -t a H -ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy EG párhuzamos FH -val.

II. forduló, kezdők korcsoportja, általános tantervű osztályok részére. 1. Bizonyítsuk be, hogy ha az x , y és z számok között van 0-tól különböző, és a , b , c olyan számok, amelyekre

$$ax + by + cz = 0,$$

$$cx + ay + bz = 0,$$

$$bx + cy + az = 0,$$

akkor

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0.$$

2. Egy húrnégyszög átlói egyenlők. Szerkesszük meg a négyszöget, ha adott átlóinak hossza, két szemközti oldalának összege és egy szöge.

3. Egy ifjúsági szervezet vezetőségi tagjai négy bizottságban működnek. Minden vezetőségi tag két bizottságban dolgozik, és bármelyik két bizottságnak egy közös tagja van. Hány tagú a vezetőség?

A szakosított tantervű matematika–fizika osztályok tanulóinak a 2. feladat helyett a következőt kellett kidolgozniuk:

2. mf. Az ABC háromszög AC oldalára négyzetet rájzolunk a B -t tartalmazó partján. Mi a négyzet C -vel szemben levő csúcsának mértani helye, ha A , B rögzített és C befutja az AB átmérőjű kört?

II. forduló, kezdők korcsoportja, szakosított tantervű matematikai osztályok részére. 1. Legyen az ABC háromszög síkjában levő P pont tükörképe az AB , BC , CA egyenesre rendre P_c , P_a , P_b , a $P_aP_bP_c$ háromszög köré írt kör középpontja Q . Legyenek továbbá Q hasonlóan képzett tükörképei Q_c , Q_a , Q_b . Bizonyítsuk be, hogy az ezeken átmenő kör középpontja P .

2. Bizonyítsuk be, hogy ha k pozitív egész szám, akkor

$$k^3 + 2k^2 + 2k + 1$$

nem négyzetszám.

3. Milyen szabályszerűség alapján képezték az alábbi számhármassokat:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}; \quad \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{7}; \quad \frac{4}{5}, \frac{5}{2}, \frac{9}{7}; \quad \frac{4}{9}, \frac{9}{4}, \frac{13}{13}?$$

Rendezzük a 3–3 számot nagyság szerint. Mit tapasztalunk? Igaz-e az itt észrevehető összefüggés általánosan is?

II. forduló, haladók korcsoportja, általános tantervű osztályok részére. 1. Azonos a kezdők korcsoportjában az ált. tantervű osztályok részére kitűzött 1. feladattal.

2. A k körbe rajzolt $ABCD$ téglalap AB oldalának E pontjában emelt merőleges a k kört az F pontban metszi, mégpedig úgy, hogy a DC egyenes elválasztja E -t és F -et. Bizonyítsuk be, hogy ha FC párhuzamos DE -vel, akkor

$$AD : AE = AE : EF = EF : AB.$$

3. Egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, tízes számrendszerbeli alakjuk: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BDA}$, ahol A , B , C és D az egyes számjegyeket jelentik. Határozzuk meg a háromszög oldalait.

A szakosított tantervű matematika–fizika osztályok tanulóinak az 1. feladat helyett a következőt kellett kidolgozniuk:

1. mf. Adva van 6 szám, melyeket úgy nyertek, hogy 4 tetszés szerinti számból kettőt-kettőt minden lehetséges párosításban összeadtak:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_6.$$

Határozzuk meg az eredeti négy számot.

II. forduló, haladók korcsoportja, szakosított tantervű matematikai osztályok részére. 1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x^2 + xy + y^2 = 7,$$

$$x^2 + xz + z^2 = 13,$$

$$y^2 + yz + z^2 = 19.$$

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja T, a BC befogó felezőpontja F. Az a kör, amelyik a háromszög A pontból induló súlyvonalát F-ben érinti és a B csúcson is átmegy, messe a háromszög átfogóját másodszor a D pontban. Bizonyítsuk be, hogy az ABF és FTD háromszögek hasonlóak.

3. Egy versenyen hatan indultak: A, B, C, D, E és F. Valaki telefonon kért felvilágosítást a sorrendről. „Találja ki!” – volt a válasz. „Talán A, B, C, D, E, F?” „Szó sincs róla! Senkinek sem találta el a helyezését, sőt a versenyzők egymásutánját sem; vagyis a helyes sorrendben senkit sem az követ közvetlenül, aki az ön tippje szerint következik.” – „Akkor talán F, E, A, C, B, D?” – „Most már sokkal jobb: háromnak eltalálta a helyezését és három olyan van, aki ezúttal helyes sorrendben követi a közvetlenül előtte állót.” – Mi a helyes sorrend?

A versenyek eredménye

A) Kezdők versenyei

A 1. Az általános tantervű és a matematika–fizika osztályok versenyén mindhárom feladatot kiemelkedően megoldotta, I. díjban, 250 Ft jutalomban részesült

Frankl Péter (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., mat.–fiz., tanára: Kiss Sándor),

mindhárom feladatot kisebb hiányossággal megoldotta, II. Díjban, 150–150 Ft jutalomban részesült:

Keresztes Tibor (Budapest, Radnóti M. Gyak. Gimn., mat.–fiz., tanára: Sugár György) és

Martonfi Viktor (Veszprém, Lovassy L. Gimn., mat.–fiz., tanára: Knoll János).

Kiemelkedő munkáért első dicséretben és 50 Ft-os könyvtalványban részesültek (betűrendben felsorolva): Bolla József (Bpest, Eötvös J. Gimn., mat.–fiz., tanára: Nagy Miklósné), Göndöcs Ferenc (Győr, Révai M. Gimn., mat.–fiz., tanára: Gémesi Gabriella), Horváth László (Hódmezővásárhely, Ságvári E. Alt. Isk., 8. oszt., tanára: Ujvári Józsefné), Jeszenszky József (Kecskemét, Katona J. Gimn., tanára: Horti Áttila), Nagy Zoltán (Bpest, Piarista Gimn., tanára: Varga László), Pósfai János (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., mat.–fiz., tanára: Dallos Gyula) és Szabó Lóránt (Székesfehérvár, József A. Gimn., tanára: Wolkensdorfer János).

További kilenc tanuló második dicséretben, oklevélben részesült (betűrendben felsorolva): Kunszenti Ágnes (Dunaújváros, Gimn., tanára: Fejős Ádám), Pásztor Miklós (Bpest, Ságvári E. Gyak. Isk., tanára: Ries Ferenc), Péter Erika (Dombóvár, Gőgös I. Gimn., tanára: Feszt Katalin), Sümeghy Ferenc (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., mat.–fiz., tanára: Vadvári Tiborné), Szabó Éva (Bpest, Radnóti M. Gyak. Isk., mat.–fiz., tanára: Sugár György), Szendrei Ágnes (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., mat.–fiz., tanára: Hajnal Imre), Szendrei Mária (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., mat.–fiz., tanára: Hajnal Imre), Turán György (Bpest, XII., Némethölgyi úti Ált. Isk. 8. o. t., tanára: Vágvolgyi Jenő), Várgéő Tamás (Bpest, Piarista Gimn., tanára: Varga László)

A 2. A szakosított tantervű matematikai osztályok versenyén mindhárom feladat kiemelkedő megoldásáért I. díjban, 250 Ft jutalomban részesült:

Úry László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., tanára: Bánhegyi László).

Mindhárom feladat szép megoldásáért II. díjban, 200 Ft jutalomban részesült:

Komjáth Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., tanára: Kőváry Károly).

Mindhárom feladatot megoldotta kisebb hiányosságokkal, dicséretben és 50–50 Ft-os könyvtalványban részesült (betűrendben felsorolva): Bajmóczy Ervin, Bosznay Ádám, Lázár András és Ruzsa Imre, valamennyien a budapesti Fazekas M. Gyak. Gimn. tanulói, Kőváry Károly tanítványai.

B) Haladók versenyei

B 1. Az általános tantervű és a matematika–fizika osztályok versenyén mindhárom feladat teljes megoldásáért I. díjat, 250 Ft jutalmat nyert:

Lempert László (Budapest, Radnóti M. Gyak. Iskola, tanára: Cserepkei Ferenc).

Mindhárom feladat lényegében helyes megoldásáért II. díjat, 150–150 Ft jutalmat nyert a következő négy versenyző:

Győry György (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., tanára: Vikár István),

Láz József (Budapest, Eötvös J. Gimn., mat.–fiz., tanára: Imrecze Zoltán),

Skopál István (Budapest, Kölcsey F. Gimn., mat.–fiz., tanára: dr. Benda Kálmánné) és

Szamosújvári Sándor (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., tanára: Vikár István).

Győry az 1. feladatra adott kétféle megoldásával, Szamosújvári a 3. feladatra adott legteljesebb megoldásával tűnt ki, Láz és Skopál mindhárom feladat megoldása során egyenletesen jó teljesítményt nyújtott.

Két feladat teljes megoldásáért vagy két feladat lényegében helyes megoldásáért és a harmadikban elért részeredményért dicséretet és oklevelet kaptak: Kérchy László (Baja, III. Béla Gimn., mat.–fiz., tanára: Hegedüs József), Kugler László (Ajka, Bródy L. Gimn., tanára: Balogh Antalné), Nyikos István (Bpest, Eötvös J. Gimn., mat.–fiz., tanára: Imrecze Zoltán), Petravich Gábor (Bpest, Eötvös J. Gimn., mat.–fiz., Imrecze), Szabó György (Nyíregyháza, Vasvári P. Gimn., mat.–fiz., tanára: Lakatos Zoltán) és Szente János (Pécs, Széchenyi I. Gimn., mat.–fiz., tanára: Tóth Júlia).

B 2. A szakosított tantervű matematikai osztályok versenyén öt tanuló mindhárom feladatot megoldotta. Közülük a 2. feladatra adott általánosítást is figyelembe véve, I. díjat, 250 Ft jutalmat nyert:

Gönczi István (Miskolc, Földes F. Gimn., tanára: dr. Csernyák Lászlóné).

Ugyancsak a 2. feladatra tett kiegészítéseikért II. Díjat, 150–150 Ft jutalmat nyertek:

Kóczy László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., tanárai: Thiry Imréné, Kardos Gyula) és *Somorjai Gábor* (Budapest, I. István Gimn., tanárai: Jelítai Árpád, Móró Károly, Rác János).

A feladatok egyszerű, teljes megoldásáért III. Díjat, 100–100 Ft jutalmat nyertek:

Alexits György (Budapest, Fazekas, Thiry Imréné, Reményi Gusztáv) és

Szőke Mária (Budapest, Berzsényi D. Gimn., tanárai: Herczeg János, Pogáts Ferenc).

Két feladat helyes megoldásáért és a harmadikban elért részeredményért dicséret. ben részesültek, oklevelet kaptak (betűrendben): *Barbarits András* (I. István), *Bauer Katalin* (Berzsényi, Herczeg János, Ratkó István), *Beck József* (I. István), *Bertók Péter* (Bpest, Fazekas, tanárai: Thiryné, Kardos), *Borzsák Péter* (I. István), *Havril Katalin* (Bpest, Fazekas, Thiryné, Kardos), *Hermann Tamás* (Bpest, Fazekas, Thiryné, Kardos), *Kálmán Miklós* (Bpest, Fazekas, Thiryné, Reményi), *Nagy István* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., tanára: Tóth Izabella), *Pataki János* (Berzsényi, Herczeg, Ratkó), *Próhle Tamás* (Bpest, Fazekas, Thiryné, Kardos), *Tibor Éva* (Bpest, Fazekas, Thiryné, Reményi) és *Turi András* (I. István).

Kimutatás a II. fordulóra bejutott versenyzők számáról államigazgatási egységek szerint. Megyék: *Baranya*: 0 kezdő, 1 haladó (röviden: 0, 1); *Bács-Kiskun*: 3, 3; *Békés*: 0, 1; *Borsod-Abaúj-Zemplén*: 0, 3; *Csongrád*: 3, 1; *Fejér*: 4, 8; *Győr-Sopron*: 9, 11; Hajdú: 0, 0; Heves: 1, 2; *Komárom*: 4, 4; *Nógrád*: 1, 0; *Pest*: 3, 0; *Somogy*: 1, 2; *Szabolcs-Szatmár*: 2, 3; *Szolnok*: 3, 7; *Tolna*: 3, 1; *Vas*: 2, 0; *Veszprém*: 6, 2; Zala: 2, 2. Városok: *Budapest*: 65, 59; *Debrecen*: 5, 7; *Miskolc*: 1, 1; Pécs: 1, 2; *Szeged*: 5, 2. – Összesen 124, 122.