

Megjegyzések az 1583. feladat¹ megoldásához

Vizsgáljuk először feladatunk állítását abban a speciális esetben, amikor $y_i = z_i = u_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Ekkor (3) a (2) összefüggés alapján a következő azonosságot jelenti:

$$(x_5 - x_5)^2 = \frac{1}{4} \left[(x_1 - x_5)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_5)^2 \right] - \frac{1}{16} \left[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 \right],$$

amit az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = \sum_{i=1}^m a_i$$

jelöléssel, és (2)-t figyelembe véve a következő alakban írhatunk:

$$\left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i - x_5 \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (x_i - x_5)^2 - \frac{1}{16} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=j+1}^4 (x_i - x_j)^2.$$

Ez az összefüggés az alábbi (3*) összefüggés speciális esete $n = 4$ mellett, ha x_{n+1} helyett egyszerűen x -et írunk:

$$(3^*) \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - x \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (x_i - x_j)^2.$$

Ezt az összefüggést fogjuk először bebizonyítani.

A jobb oldal utolsó tagja a

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (x_i - x_j)^2$$

összeg fele, ezt figyelembe véve, és $2n^2$ -tel szorozva a következő azonosságot kapjuk:

$$2 \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x) \right]^2 = 2n \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (x_i - x_j)^2$$

és a $v_i = x_i - x$ jelölést bevezetve

$$(*) \quad 2 \left[\sum_{i=1}^n v_i \right]^2 = 2n \sum_{i=1}^n v_i^2 - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (v_i - v_j)^2.$$

A jobb oldalon

$$n \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i^2,$$

így a jobb oldal átalakítható:

$$\begin{aligned} 2n \sum_{i=1}^n v_i^2 - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (v_i - v_j)^2 &= n \sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i^2 - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (v_i - v_j)^2 = \\ &= n \sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[v_i^2 - (v_i - v_j)^2 \right] = n \sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_j (2v_i - v_j) = \\ &= n \sum_{i=1}^n v_i^2 + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_i v_j - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_j^2 = n \sum_{i=1}^n v_i^2 + 2 \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^n v_i - n \sum_{j=1}^n v_j^2 = 2 \left(\sum_{i=1}^n v_i \right)^2. \end{aligned}$$

Ezzel azonosságunkat bebizonyítottuk. Figyeljük meg, hogy a $v_i \cdot v_j$ szorzásról csak a kommutativitást és a disztributivitást használtuk fel. Ha tehát v_i, v_j szimbolikusan a $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{ik})$, $v_j = (v_{j1}, \dots, v_{jk})$ szám- k -asokat jelöli, és ezek szorzatát a

$$v_i v_j = \sum_{\nu=1}^k v_{i\nu} v_{j\nu}$$

összeggel definiáljuk, akkor (*) ugyanígy bizonyítható, hiszen ez a szorzás nyilván kommutatív és disztributív.

Továbbmenve, ha az $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$, $x = (x_1, \dots, x_k)$ szám- k -asok v_i különbségét a $v_{i\nu} = x_{i\nu} - x_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, k$) relációval definiáljuk, akkor ezen az úton (3*)-ot is értelmezhetjük tetszőleges szám- k -asokra, és az így kapott összefüggés bizonyítása pontosan a fenti úton történik.

¹Lásd ezen számban, 130. o.