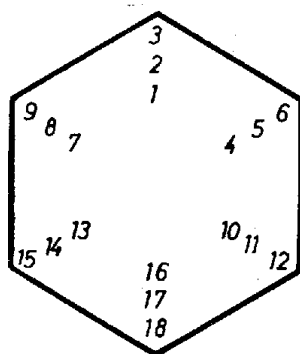


Gondoljuk, hogy előttünk fekszik az 1–18 egész számok összes lehetséges elrendezése az 1147. gyakorlat úthálózatának pontjain, továbbá hogy minden egyes elrendezés mellett fel van tüntetve a szomszédos számpárjai közti különbségek legkisebbike, d , valamint legnagyobbikuk, D . Kérdezzük, mi a talált összes d értékek legnagyobbika, d^* , és mi a talált D értékek legkisebbike: D^* .

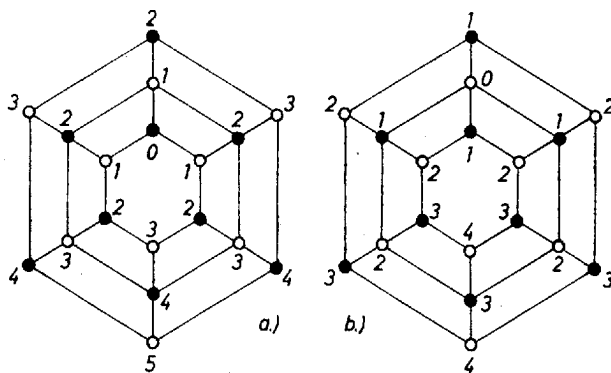
Bebizonyítjuk, hogy mindkét keresett érték 6-tal egyenlő, mégpedig úgy, hogy egyrészt külön-külön belátjuk a $d^* < 7$, illetőleg $D^* > 5$ egyenlőtlenséget, másrészt példát adunk olyan elrendezésre, melyben $d = 6$, illetőleg $D = 6$. Az előbbire már az 1147. gyakorlat megoldása tartalmaz példákat, az utóbbira példa az 1. ábra.



1. ábra

I. Tegyük fel, hogy van olyan X elrendezés, melyben egyetlen különbség sem kisebb 7-nél: $d \geq 7$. Egy ilyen elrendezésben egy n számmal szomszédos pontokon nem állhatnak az $n - 6$ -tól $n + 6$ -ig terjedő egész számok. Nem minden n esetében tartozik a kizárt 13 szám mindegyike az elrendezendő számok közé, azonban az $a = 8, 9, 10$ és 11 számok mindegyike valóban legalább 13 számot zár ki, és legfőljebb 5 számot enged meg szomszédjaként. Először ezek helyzetével foglalkozunk, ezeket B típusú számoknak nevezzük, a náluk kisebbeket A -, a nagyobbakat pedig C -típusúaknak.

Állítjuk, hogy bármelyik B -típusú számtól mindegyik másik B -számhoz a hálózat páros számú útszakaszát tartalmazó útvonalon jutunk át. Szemléletesebben mondhatjuk ki ezt annak az észrevételnek a felhasználásával, hogy a csomópontok kiszínezhetők két színnel úgy, hogy minden útszakasz két végpontja különböző színű.² Állításunk ekkor azt mondja, hogy az X elrendezésben mind a négy B -szám ugyanolyan színű ponton áll, hiszen páros számú útszakaszból álló, nem zárt útvonal végpontjai megegyező színű pontok. (A 2. ábra a) és b) része azt mutatja, hogy a kis körút, ill. a középső körút 0 jelű pontjából kiindulva 1, 2, ..., útszakasz megtételével mely ponthoz érünk el; egy a nagy körúton kijelölt csomópontból való kiindulás megfelelő ábrája úgy adódik a -ból, hogy felcseréljük a sugárutak végpontjainak adatait.)



2. ábra

Amennyiben vegyesen világos és sötét ponton állnak a B -számok, eloszlásuk a két színre vagy 2 : 2 vagy 3 : 1. Ezek kizárása végett gondoljunk a B -számokkal szomszédos pontok betöltésére. Két ugyanolyan színű pontnak együttvéve legalább 5 szomszédja van – hiszen egy pont 4, ill. 3 másikkal szomszédos aszerint, hogy a középső vagy valamelyik szélső körút megy át rajta –, továbbá közös szomszédjaik száma legfőljebb 2, ti. amikor pontosan az egyik a középső körúton áll. Így 2 : 2 eloszlás esetén a négy B -számnak együttvéve legalább 10 szomszédja lenne. Másrészt az A -típusú számok közül az a legnagyobb, ami még felléphet legalább egy B -szám mellett, a $11 - 7 = 4$, a C -típusú számok

¹Lásd ezen számban, 215. o.

²Lényegében véve ezt használta ki az 1147. gyakorlatban látott a) és b) elrendezés, a számokat „kicsikre” és „nagyokra” kettéosztva.

közül pedig a legkisebb ilyen a $8 + 7 = 15$. Így B -szám szomszédjaként szóba sem jöhet más szám, mint az 1, 2, 3, 4 (A_0 -típus) és 15, 16, 17, 18 (C_0 -típus). Ennyi pedig kevés a mondott 10 pont betöltéséhez.

Hasonlóan a 3 : 1 eloszlás esetén a három egyszínű pontnak együtt véve legalább 6 szomszédja van, a másik színűnek legalább 3, együtt ismét több, mint ahány A_0 - és C_0 -típusú szám van.

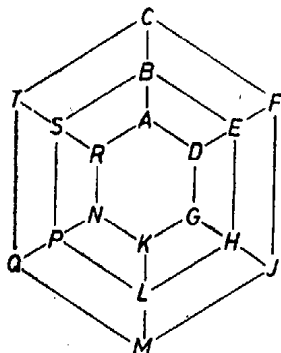
Ezek alapján mondhatjuk, hogy mindegyik B -szám pl. világos ponton áll. Megmutatjuk, hogy a 9 sötét pont nem tölthető be a $d \geq 7$ követelmény megtartásával. A sötét pontokban nyilván vegyesen állnak A - és C -típusú számok, valamelyik típus mindenestre többségben van, hiszen a pontok száma páratlan. Mondhatjuk, hogy pl. C -szám van több (ugyanis minden számunk helyére az öt 19-re kiegészítő számot írva újra megfelelő elrendezést kapunk, és abban minden egyes A -, B -, C -típusú szám helyén rendre egy C -, B -, A -típusú szám áll), így a sötét ponton álló A -számok száma legfeljebb 4.

Tekintsük e számok második szomszédait (amelyek persze szintén sötét ponton állnak). Minden pont legalább 5 másikkal áll másod-szomszedságban (2. ábrák), ezért minden sötét ponton álló A -számnak van legalább két C -típusú másodszomszédja. Különbségük legalább 14, mert közös szomszédjuk csak az A -típusúnál nagyobb és a C -típusúnál kisebb szám lehet; ezért csak A_0 -típusú szám szerepelhet sötét ponton, de közülük a 4-es sem, mert az ezt legalább 14-gyel meghaladó számok közül csak egy szerepelhet, a 18-as.

Emiatt legfeljebb három A_0 -típusú szám állhat sötét ponton, s legalább három C -típusú, náluk legalább 14-gyel nagyobb másodszomszédjuk van, így pedig a 3-as sem léphet fel. Ugyanígy a 2-es, végül az 1-es sem, így valóban nem tölthető be a 9 sötét pont, hiszen C -típusú szám csak 7 van, és valóban nem lehetséges X elrendezés.

II. Egy olyan Y elrendezésben, melyben $D \leq 5$, az 1, 2, 17, 18 számok egyike sem állhat a középső körúton. Ehhez belátjuk, hogy az 1, 18, az 1, 17, a 2, 18 és a 2, 17 számpárok egyikének tagjai sem állhatnak egymástól 4 útszakasznyinál kisebb távolságban. Az első három párban a különbség legalább 16, viszont 3 útszakaszon a legnagyobb megengedett különbséggel is – mondjuk így: feszítetten is – csak $3 \cdot 5 = 15$ különbség alakulhat ki. 2 és 17 pedig azért nem állhat 3 útszakasznyi távolságban, mert bármely pontból bármely olyan másikba, amely tőle 3 útszakasznyira van, mindig vezet két, közös közbülső pontot nem tartalmazó útvonal (2. ábrák), és nem állhat mindkét útvonal mentén a feszített 2, 7, 12, 17 számsorozat.

Mármost a középső körút pontjaitól csak 2–2 másik pont van legalább 4 útszakasznyi távolságra, és ennyi az alábbiak szerint kevés a mondott 4 szám elrendezésére. Ha pl. az 1-es számot a 3. ábra B pontjába írjuk be – jelképesen $1 = B$ –, akkor 17 és 18 számára csak a K , M pontok jönnek szóba, így pedig a 2-es szintén csak B -ben állhatna, mert K -tól C , B , F és T vannak legalább 4 útszakasznyira, M -tól pedig A , B , D és R , és e két felsorolásban csak B közös. Hasonlóan adódik állításunka 2-es, 17-es és 18-as számra.



3. ábra

Ezek szerint, az ábra betöltését az 1-essel kezdve, lényegében csak $1 = A$ jön szóba, és ekkor 17 és 18 számára J , M és Q közül kettő választandó. A J , Q pár nem választható, mert az előbbiekhöz hasonlóan $2 = A$ -ra vezet; az M , Q párból egyértelműen $2 = D$, az M , J pár pedig mellőzhető, mert tükörképe az utóbbinak a CM tengelyre nézve.

A 2, 17 számpárra fent mondottak érvényesek az 1, 16 párra is, ezért a 16-os csak L -ben vagy J -ben állhat. Folytassuk az $1 = A$, $2 = D$, $16 = J$ elhelyezést. A $H-D$ különbség nem lehet feszítetten $2 \cdot 5 = 10$, azaz $H \neq 12$, mert D -ből H -ba E -n át is, G -n át is eljuthatunk, s nem lehet $E = G = 7$. Így $H - D \leq 9$, és $J - D = 14$ miatt $J - H = 5$, azaz $H = 11$, továbbá az E , G pontokba csak 6 és 7 írható. Ugyanígy $J - E \leq 9$ miatt $E - D = 5$, ezért $E = 7$, így pedig $G = 6$, végül $F = 12$.

A $2 = D$, $16 = L$ kiindulás hasonlóan adja egymás után egyértelműen a $H = 11$, $G = 7$, $E = 6$, $E = 12$ elhelyezést. Mindig érvényes, hogy ha az n és $n + 14$ számok távolsága 3 útszakasz, akkor a 14 egységnyi növekedés a köztük vezető két, közös közbülső pont nélküli útvonal egyikén az n , $n + 4$, $n + 9$, $n + 14$ számokon megy végbe, másikon pedig az n , $n + 5$, $n + 10$, $n + 14$ számokon át, mert az egyetlen még gondolható n , $n + 5$, $n + 9$, $n + 14$ sorozat amazok mindegyikét lehetetlenné teszi. (A fenti két példán kívül a két végpont úgy is állhatna még egymáshoz képest, mint pl. A és K .)

Most már könnyen adódik, hogy a 3-as szám nem helyezhető el. Ugyanis egyrészt a 3, 18 pár távolsága is legalább 4 útszakasz, másrészt az iméntiek szerint a 3, 17 távolság is legalább 4. Ha ugyanis 3 és 17 távolsága 3, akkor a köztük levő két útvonal egyikén 3, 7, 12, 17 áll, holott a 12-est vagy F -be, vagy K -ba írtuk, és ezek egyike sem szomszédos

sem M -mel, sem Q -val, ahol a 17-es állhat. Mármost M -tól és Q -tól legalább 4 útszakasznyira A , B , D , R , ill. D , A , E , G van, tehát a 3-as részére csak a foglalt A és D felelne meg.