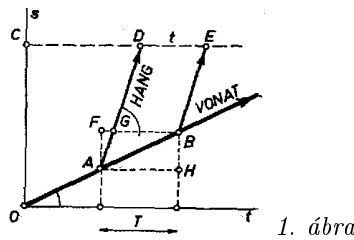


Az I. forduló feladatai

1. Vasútvonal mellett álló pályaórhöz vonat közeledik v sebességgel. Sípjelet ad le T ideig. Mennyi ideig hallja a pályaőr a sípjelet? A hang sebessége $c = 330$ m/s; $v = 108$ km/s = 30 m/s, $T = 3$ s; a sípjel végéig a vonat nem éri el a pályaőrt.

(Párkányi László)



Megoldás. A vonat és a hang mozgását ábrázoljuk grafikusán (1. ábra). A vonat s útját mint t idő függvényét az OAB egyenes tünteti fel; ez az egyenes a t -tengellyel v tangensű szöget zár be. A sípolás A -ban kezdődik és a hanghullám útját AD egyenes tünteti fel; $\tan DAB = c$. A sípjel vége B pontból indul. A sípjel vonaton mért időtartama $AH = T$. Az origótól OC távolságban levő pályaőr a sípjelet $DE = t$ időtartamig hallja. A derékszögű háromszögeket felhasználó számolás:

$$\begin{aligned} t &= DE = FB - FG = AH - FG = T - AF \cdot \tan FGA = \\ &= T - BH / \tan DAB = T - AH \cdot \tan BAH / \tan DAB = \\ &= T - Tv/c = T(1 - v/c). \end{aligned}$$

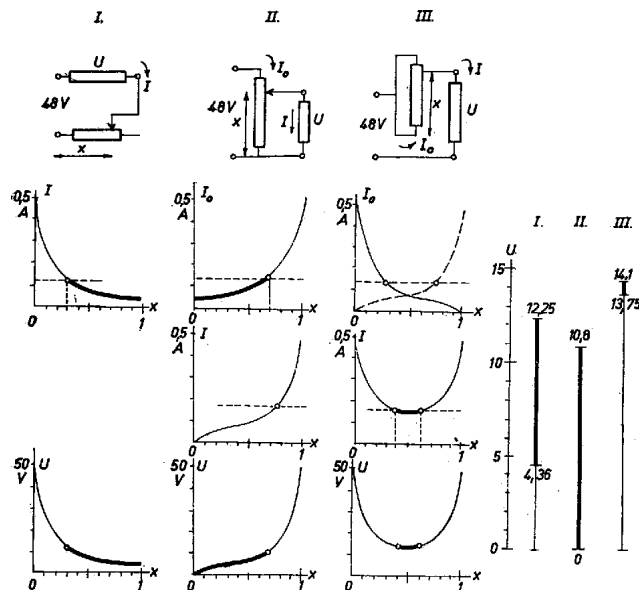
Számadatainkkal, mivel $v/c = 1/11$, ezért $t = 10T/11 = 2,727$ s.

A számítás tartalmazza a Doppler-jelenség egyik esetének levezetését, mert a pályaőr ugyanannyi rezgést kap t idő alatt, amennyit a síp T idő alatt bocsátott ki, tehát az észlelt hangmagasság T/t arányában megnagyobbodik.

2. 100 ohmos, 2 wattos fogyasztót változtatható feszültséggel akarunk működtetni. Felhasználható tetszés szerinti kapcsolásban egy háromkivezetéses tolóellenállás, amely 1000 ohmos és 15 wattal terhelhető, valamint egy elhanyagolható belső ellenállású, 48 voltot adó feszültségforrás. Milyen határok között változtathatjuk a fogyasztóra jutó feszültséget? (Nagy László)

Megoldás. A fogyasztót legfeljebb $I = \sqrt{N/R} \approx \sqrt{2/100} = 0,141$ amperrel terhelhetjük; a tolóellenálláson legfeljebb $I_0 = \sqrt{15/1000} = 0,1225$ amper mehet át károsodás nélkül. A fogyasztóra eszerint legfeljebb $100 \cdot 0,141 = 14,1$ volt juthat.

A tolóellenállás csúszó érintkezőjének állását egy bizonyos x törtszám jellemzi, amely megadja, hogy az ellenállás hányadrésze van az egyik végső kivezetés és a csúszó érintkező között, $0 < x < 1$. A tolóellenállás egyik részének $1000x$, másik részének $1000(1-x)$ az ellenállása. Minden elektromos mennyiséget x függvényeként számolunk.



2. ábra

I. Előtetellenállás (2. ábra I. oszlopa). A tolóellenállás $1000x$ ohmja és a fogyasztó 100 ohmja sorba van kapcsolva. A közös áramerősség:

$$I = \frac{48}{100 + 1000x}.$$

A fogyasztóra jutó feszültség: $U = 100I$. A beállítást a tolóellenállás teherbírása korlátozza, a csúszó érintkező $x = 0,292$ és $x = 1$ között állhat, miközben a feszültség $12,25$ V és $4,36$ V között változik.

II. Feszültségosztó (2. ábra II. oszlopa). A tolóellenállás $1000x$ ohmja és a 100 ohmos fogyasztó párhuzamosan vannak kapcsolva és eredő ellenállásukkal van sorba kötve a tolóellenállás felső részének $1000(1 - x)$ ohmja. Ezek alapján a feszültségosztó felső részén átmenő áramerősség:

$$I_0 = 0,048 \cdot \frac{1 + 10x}{1 + 10x - 10x^2},$$

a fogyasztó áramerőssége:

$$I = 0,48 \cdot \frac{x}{1 + 10x - 10x^2}.$$

A fogyasztóra jutó feszültség most is $U = 100I$. A beállítást ismét a tolóellenállás teherbírása korlátozza, a csúszó érintkező $x = 0$ és $x = 0,696$ között állhat, miközben a feszültség 0 V és $10,8$ V között változik.

III. Vegyes kapcsolás (2. ábra III. oszlopa). A tolóellenállás két szélét összekötve kapcsoljuk a feszültségforrás egyik végére, és a fogyasztót a csúszó érintkező és a feszültségforrás másik vége közé kapcsoljuk. Minden adat az $x = 0,5$ -es beállításhoz képest szimmetrikus. A tolóellenállás két része párhuzamosan van kapcsolva, és ezzel van sorba kötve a fogyasztó. A tolóellenállás egyik részének áramerőssége:

$$I_0 = \frac{0,48(1 - x)}{1 + 10x(1 - x)},$$

a fogyasztó áramerőssége:

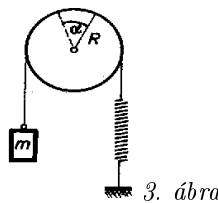
$$I = \frac{0,48}{1 + 10x(1 - x)}.$$

A fogyasztóra jutó feszültség természetesen most is $U = 100I$. Ez esetben a beállítást a fogyasztó teherbírása korlátozza, a csúszóellenállás $x = 0,4$ és $x = 0,6$ között állhat, miközben a fogyasztóra jutó feszültség szélső értékei $13,75$ V (ha $x = 0,5$) és $14,1$ V (ha $x = 0,4$ vagy $x = 0,6$).

A 2. ábra jobb oldali szélső oszlopa a felhasználható feszültségek áttekintését adja meg. 0-tól $4,36$ V-ig csak a II. kapcsolással, $4,36$ V-tól $10,8$ V-ig akár I., akár II. kapcsolással juthatunk el; $10,8$ V-tól $12,25$ V-ig csak az I. kapcsolás használható. $12,25$ V és $13,75$ V közötti értéket nem tudunk beállítani, azután $13,75$ V és $14,1$ V közötti területet a III. kapcsolással érhetünk el.

3. Vízszintes tengely körül forgatható R rádiuszú, I tehetetlenségi nyomatékú korongot rugó tart egyensúlyi helyzetben úgy, hogy a rugó forgatónyomatéka arányos a szögelfordulással. A korong kerületére fonalat tekerünk, a fonál végére m tömeget akasztunk (3. ábra). Milyen mozgást végez a rendszer, ha kis mértékben kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből? A súrlódástól és közegellenállástól eltekintünk.

(Wiedemann László)



3. ábra

Megoldás. A forgatónyomaték arányos a szögelfordulással: $k\alpha$. A teljes tehetetlenségi nyomaték $I + mR^2$, mert m tömeg úgy mozog, mintha a korong kerületén lenne. A forgómozgás alaptörvénye szerint β szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{-k\alpha}{I + mR^2}.$$

Ha R -rel bővítünk, β szöggyorsulásból $\beta R = a$, a kerületi pont gyorsulása lesz. Ugyanekkor $\alpha R = s$ a kerületi pont útját jelenti (α mindvégig radiánban mérendő). Ezért:

$$a = \frac{-ks}{I + mR^2}.$$

A gyorsulás arányos az úttal és visszafelé mutat, tehát rezgőmozgás keletkezik. Egybevetve a rezgő mozgás $a = -\omega^2 s$ törvényével,

$$\omega^2 = \frac{k}{I + mR^2},$$

így a lengésidő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + mR^2}{k}}.$$

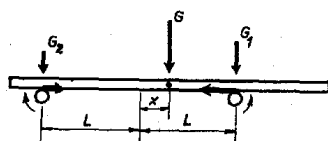
Homogén, M tömegű henger esetében $I = MR^2/2$. A keletkező rezgés gyorsulása abszolút értékben ne legyen nagyobb, mint g nehézségi gyorsulás, különben a fonál nem marad feszes és m tömeg ugrál. A megengedhető legnagyobb amplitúdó:

$$\alpha = \frac{g(I + mR^2)}{kR}.$$

A II. forduló feladatai

1. Két egyenlő sugarú kis henger egymással szemben gyorsan forog, párhuzamos tengelyeik ugyanabban a vízszintes síkban vannak. A tengelyek távolsága $2L$. Helyezzünk a két hengerre a tengelyekre merőlegesen homogén tömegeloszlású lécet úgy, hogy a lécsúlypontja a két henger merőleges távolságát merőlegesen felező síktól x távolságban legyen. Milyen mozgást végez a magára hagyott lécs?

(Párkányi László)



4. ábra

Megoldás. A lécs $G = mg$ súlyából a tengelyekre jutó összetevők (4. ábra):

$$G_1 = G \cdot \frac{L+x}{2L}, \quad G_2 = G \cdot \frac{L-x}{2L}.$$

Mivel a hengerek gyorsan forognak, feltétlenül van sebességkülönbség a lécs és a hengerek felülete között, ezért μG_1 és μG_2 súrlódási erők lépnek fel úgy, hogy a lécs közepe felé mutatnak (μ a súrlódási együttható). Mivel μG_1 nagyobb, mint μG_2 , ezért $\mu G_1 - \mu G_2 = \mu(G_1 - G_2) = \mu mgx/L$ erő viszi vissza a lécs szimmetrikus helyzetébe. Ez az erő arányos a nyugalmi helyzettől mért távolsággal, ezért rezgőmozgás keletkezik. A mozgató erő:

$$P = -\frac{\mu mg}{L} \cdot x,$$

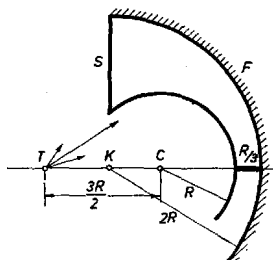
egybevetve a rezgőmozgás $P = -m\omega^2 s$ erőtvénnyel (s az út): $\omega = \sqrt{\mu g/L}$ és a rezgésidő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\mu g}}.$$

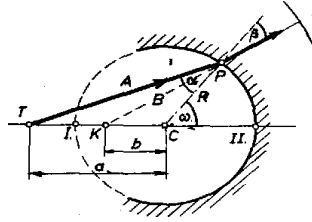
Eredményünk bizonytalanná válna, ha olyan nagy amplitúdóval kezdenénk a mozgást, hogy a lécs sebessége a közép felé haladva elérné a hengerek kerületi sebességét, ugyanis ekkor, megszűnvn a sebességkülönbség, nem lehetünk abban biztosak, hogy a keletkező súrlódási erők μG_1 , illetve μG_2 .

2. $n = 1,5$ törésmutatójú üvegből elkészítjük az 5. ábrán keresztmetszetben látható vastag üveglencsét, melynek belső rádiusza R , külső rádiusza $2R$, tengelymenti vastagsága $R/3$. A külső F gömbfelületet fémbevonattal tükrözővé, az S síkfelületet koromréteggel fényelnyelővé tesszük. A tengelyen C középponttól $3R/2$ távolságban T pontszerű fényforrást helyezünk el. Erről a tárgyról milyen képet ad az optikai rendszer?

(Bodó Zalán)



5. ábra



6. ábra

Megoldás. Foglalkozzunk először a belső gömbfelülettel (6. ábra). T -ből P -be levegőben érkező fénysugár P -ben ér az üvegfelülethez; beesési merőlegese CP rádiusz, beesési szöge α , törési szöge β . A megtört sugár úgy halad az üvegben, mintha K -ból jönne. A TCP háromszögből sinus-tétellel: $a/A = \sin \alpha / \sin \omega$, azután KCP háromszögből $b/B = \sin \beta / \sin \omega$ és egyenleteink osztásával, mivel $\sin \alpha / \sin \beta = n$ a törésmutató:

$$\frac{a}{b} = n \cdot \frac{A}{B}.$$

Képkötés csak akkor lehetséges, ha a legkülönbözőbb irányokban induló fénysugarak esetében a/b állandó marad. Ehhez az szükséges, hogy bárhol legyen is P pont, az A/B hányados állandó legyen. Tehát az R rádiuszú kör T és K pontok számára Apolloniusz-kör.

T és K helyének, vagyis a , b távolságoknak meghatározására vigyük P pontot először I.-be, azután II.-be:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= n \cdot \frac{a - R}{R - b}, \\ \frac{a}{b} &= n \cdot \frac{a + R}{R + b}. \end{aligned}$$

Egyenletrendszerünk megoldása:

$$\begin{aligned} a &= nR, \\ b &= \frac{R}{n}. \end{aligned}$$

(Egyébként ezek szerint $A/B = n$, $a/b = n^2$.)

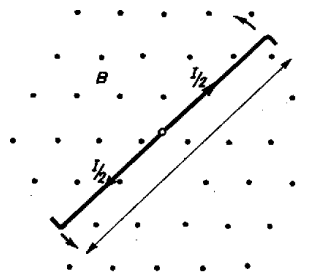
Ha tehát T pontot úgy helyezzük el, hogy $a = nR$ legyen, akkor a gömbfelület bármely pontja felé haladó fénysugár úgy törik meg az üvegben, mintha K -ból indult volna ki, amelyre nézve $b = R/n$. K pont T -nek a képe. Ez minden közelítés nélkül, bármilyen nagy nyílásszögű sugárnyalábra érvényes. Minden gömb alakú törőfelület esetén létezik ilyen két pont, nevük Abbe-féle aplanatikus pontpár. De ha T -vel vagy K -val kilépünk a tengelyből, fellépnek a lencsehibák. Méginkább akkor, ha más, a leképezési távolságtörvénynek eleget tevő T , K pontpárt választunk.

Feladatunk számadatai mellett T és K az 5. ábrán aplanatikus pontpár, mert $TC = 3R/2$ és $KC = 2R/3$ ($n = 3/2$). Ha K mint középpont körül akármilyen rádiusszal (például $2R$ -rel) rajzolunk egy második gömbfelületet, akkor, az üvegben haladó fénysugár merőlegesen esik a külső gömbfelületre, önmagába verődik vissza és visszatér T -be. Ez akármilyen nagy nyílásszögnél igaz. Ha T -be véges méretű tárgyat helyezünk, akkor ennek reális, fordított, eredeti nagyságú képe keletkezik K -ban, de ez a kép csak akkor lesz a lencsehibáktól tűrhetően mentes, ha a tengely mentén haladó, kis nyílásszögű nyalábot használunk.

3. Egyenes l hosszúságú vízszintes vezető a közepén átmenő függőleges tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A vezető két vége higanykádba merül, ahol a bemerülő vezetékdarabokra együttesen $k_1 v^2$, a v sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő hat. Függőlegesen homogén mágneses tér van jelen. A higanykádokon és a tengelyen áramot vezetünk át, amelyet változtatható ellenállással állandóan I amper erősségen tartunk. Minden ohmos ellenállás és a levegő közegellenállása elhanyagolható. Mekkora egyenletes szögsebességgel forog a vezető? Mekkora ekkor a feszültségkülönbség a tengely és a higanykád között? Adatok: $l = 20$ cm, $k_1 = 6,25 \cdot 10^{-3}$ kg/m, $I = 4$ amper, a mágneses tér indukciója $B = 5 \cdot 10^{-2}$ Vs/m².

(Nagy László)

Megoldás. A vezető olyan nagy szögsebességre gyorsul fel, hogy a mágneses erő forgatónyomatéka egyenlő lesz a közegellenállási erő forgatónyomatékával.



7. ábra

Haladjon az áram a tengelytől a forgó vezető két vége felé $I/2$ és $I/2$ áramerősséggel. A 7. ábra felülnézetet tüntet fel. Ha a mágneses tér felülről lefelé hat, akkor a vezető az óramutató járásával ellentétesen forog felülről nézve. $k_1 v^2$ közegellenállási erő forgatónyomatéka $k_1 v^2 l/2$. Ha figyelembe vesszük, hogy v valóságos sebesség kifejezhető ω szögsebességgel $v = \omega l/2$ szerint, akkor a közegellenállási erő forgatónyomatéka:

$$\frac{k_1 \omega^2 l^3}{8}.$$

A mágneses tér a vezető egyik, $l/2$ hosszúságú felére

$$B \cdot \frac{I}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

erőt fejt ki. Átlagos erőnek $l/2$ fél dróthossz fele, vagyis $l/4$ veendő, így a fél drótra ható mágneses forgatónyomaték:

$$B \cdot \frac{I}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}.$$

Az egész drótra ható mágneses forgatónyomaték:

$$2B \cdot \frac{I}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{BIl^2}{8}.$$

A forgatónyomatékokat egyenlővé téve:

$$\frac{k_1 \omega^2 l^3}{8} = \frac{BIl^2}{8}.$$

Innen a keresett szögsebesség:

$$\omega = \sqrt{\frac{BI}{k_1 l}}.$$

Számadataink szerint $I = 4$ A, $B = 0,05$ Vs/m², $l = 0,2$ m, $k_1 = 0,00625$ kg/m és a szögsebesség $\omega = 12,65$ s⁻¹ A fordulatszám $n = 2,013$ s⁻¹.

A tengely és a higanykád között mért feszültségkülönbség csak az indukált feszültség lehet, mivel egyetlen alkatrésznek sincs ohmos ellenállása. v sebességgel mozgatott L hosszúságú vezetőben az indukált feszültség:

$$U = BvL.$$

A sebesség átlagosan az $l/4$ távolságban levő sebesség, vagyis $\omega l/4$. A dróthossz $l/2$. A forgó drót két fele párhuzamosan van kapcsolva, tehát feszültségük nem összegeződik. Az indukált feszültség:

$$U = \frac{B\omega l^2}{8}.$$

$B = 0,05$ Vs/m², $l = 0,2$ m és ω előbbi értékének felhasználásával $U = 3,16 \cdot 10^{-8}$ volt. A kísérlet az ún. unipoláris indukció egy példája, ahol az indukált feszültség nagyság és előjel szerint állandó.

Az 1967. évi fizikai tanulmányi verseny eredménye:

I. díj: *Marossy Ferenc* (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.)

II. díj: *Szalay Sándor* (Debrecen, Kossuth g. IV. o. t.)

III. díj: *Babai László* (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.)

A további helyezettek: 4. *Takács László* (Sopron, Széchenyi g. III. o. t.), 5. *Palla László* (Budapest, Piarista g. IV. o. t.), 6. *Grósz Tamás* (Budapest, Ságvári E. g. III. o. t.), 7. *Bor Zsolt* (Szeged, Ságvári E. g. IV. o. t.), 8. *Jánosy János* (Budapest, Táncsics g. IV. o. t.), 9. *Járai Antal* (Debrecen, Vegyipari Technikum III. o. t.), 10. *Augusztinovicz Fülöp* (Sopron, Széchenyi g. IV. o. t.).