

1. Az 1029. gyakorlatban látott eljárás és annak az 1109. gyakorlatban látott módosítása <sup>1</sup> a következő általánosabb eljárás speciális esetének tekinthető.

Tegyük fel, hogy  $\sqrt{a}$  közelítésére korábbi lépésekből a  $c_i$  közelítő értéket kaptuk. Legyen

$$m_i = a - c_i^2,$$

és  $\sqrt{a}$  új közelítése legyen  $c_{i+1} = c_i + d_i$ , akkor

$$m_{i+1} = a - c_{i+1}^2 = a - (c_i + d_i)^2 = a - c_i^2 - d_i(2c_i + d_i) = m_i - d_i(2c_i + d_i)$$

*függetlenül attól*, hogyan határoztuk meg az új közelítésben használt  $d_i$  értéket. Ennek meghatározásánál két szempontot vehetünk figyelembe:

a)  $c_{i+1}$  jobb közelítése legyen  $\sqrt{a}$ -nak, mint  $c_i$ , vagyis  $|m_{i+1}| < |m_i|$  legyen. Minél nagyobb az  $|m_i| - |m_{i+1}|$  különbség, annál jobb az eljárásunk.

b)  $d_i$  meghatározása egyszerű legyen.

Az első szempontot tökéletesen kielégítenénk, ha  $d_i$ -t úgy határoznánk meg, hogy  $m_{i+1} = 0$  legyen, ami

$$m_{i+1} = a - c_{i+1}^2 = (\sqrt{a} - c_{i+1})(\sqrt{a} + c_{i+1}) = 0$$

miatt azt jelentené, hogy  $c_{i+1} = \sqrt{a}$ ,  $d_i = \sqrt{a} - c_i$  volna. (Itt és a továbbiakban feltesszük, hogy a  $\sqrt{a}$  közelítéséhez használt  $c_j$  számok pozitívak.)  $d_i$  ilyen értékét természetesen csak  $\sqrt{a}$  pontos értéke alapján adhatnánk meg, közelítő értékét viszont a

$$d_i = \sqrt{a} - c_i = \frac{a - c_i^2}{\sqrt{a} + c_i} = \frac{m_i}{\sqrt{a} + c_i}$$

átalakítás alapján úgy adhatjuk meg, hogy az  $\frac{m_i}{\sqrt{a} + c_i}$  tört nevezőjében  $\sqrt{a}$ -t a már ismert közelítő értékével,  $c_i$ -vel helyettesítjük: így az 1029. gyakorlat megoldásában használt, a  $d_i = \frac{m_i}{2c_i}$  összefüggéssel megadott eljáráshoz jutunk.

Mivel azonban az  $\frac{m_i}{2c_i}$  hányados az ideális  $d_i$  korrekciónak csak közelítése, nem érdemes azt túl nagy pontossággal meghatározni. Így jutunk el a második szempont figyelembevételéhez.

A gyökvonás szokott<sup>2</sup> (10-es számrendszerbeli) végrehajtásánál  $d_i$ -t úgy határozzuk meg, hogy az  $\sqrt{a}$ -nak  $(i+1)$ -ik értékes jegye legyen, vagyis az  $\frac{m_i}{2c_i}$  hányadost csak egy értékes jegyre határozzuk meg (ami azonban ebben az esetben 0 is lehet). Ugyanígy a második szempontot tartottuk szem előtt az 1109. gyakorlat megoldásában, amikor az  $a = 1 + x$  szám gyökét  $x$  polinomjával akartuk közelíteni; tehát  $c_i$ -t

$$c_i = a_0 + a_1x + \dots + a_ix^i$$

alakban kívántuk megadni. Ebben az esetben  $m_i$  is az  $x$  polinomja lesz, és ha  $x$  kicsi,  $m_i$  csökkenését biztosítjuk azzal, ha  $x$ -nek  $m_i$ -ben fellépő legalacsonyabb kitevőjű hatványa  $x^{i+1}$  azaz  $m_i = b_ix^{i+1} + \dots$ . Ha ezt már az első  $i$  lépésben sikerült biztosítanunk, akkor az  $(i+1)$ -ik lépésben úgy érjük el, hogy  $d_i$ -t  $d_i = \frac{b_i}{2a_0} \cdot x^{i+1}$ -nek választjuk, hiszen ekkor az  $m_{i+1} = m_i - d_i(2c_i + d_i)$  polinomban  $x^{i+1}$  együtthatója 0 lesz:  $d_i$  ilyen választása épp annak felel meg, hogy az  $\frac{m_i}{2c_i}$  hányadost a számláló és nevező legalacsonyabb fokú tagjainak a hányadosával helyettesítjük.

2. Fenti megfontolásaink alapján  $a_{i+1}$ -et könnyen meghatározhatjuk  $(a_0, a_1, \dots, a_i)$  segítségével. Mint láttuk,  $d_i = \frac{b_i}{2a_0} \cdot x^{i+1}$ , tehát  $a_{i+1} = \frac{b_i}{2a_0}$ , ahol  $a_0 = 1$  és  $b_i$  az  $m_i$  polinomban  $x^{i+1}$  együtthatója:

$$m_i = a - c_i^2 = (1 + x) - (a_0 + a_1x + \dots + a_ix^i)^2$$

tehát

$$b_i = -2(a_1a_i + a_2a_{i-1} + \dots),$$

ahol az utolsó tag, ha  $i$  páros, vagyis  $i = 2j$ , akkor  $a_ja_{j+1}$ ; ha pedig  $i = 2j - 1$ , akkor  $(1/2) \cdot a_j^2$ . Kaptuk tehát, hogy

$$a_{i+1} = -(a_1a_i + a_2a_{i-1} + \dots).$$

Ennek alapján a további két tag együtthatóját gyorsabban határozhatjuk meg: ha már tudjuk, hogy

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2^3}, \quad a_3 = \frac{1}{2^4}, \quad a_4 = \frac{5}{2^7},$$

<sup>1</sup>Lásd a megoldást ezen számban 151. o.

<sup>2</sup>A négyzetgyökvonás korábban tanított algoritmus, a gyök számjegyeinek egyenként, egymás után való meghatározása az 1967/68. tanévtől kezdve nem szerepel a gimnáziumok tankönyvében. – Szerk.

akkor

$$a_5 = -(a_1a_4 + a_2a_3) = \frac{5}{2^8} + \frac{1}{2^7} = \frac{7}{2^8},$$
$$a_6 = -(a_1a_5 + a_2a_4 + \frac{1}{2} \cdot a_3^2) = -\frac{7}{2^9} - \frac{5}{2^{10}} - \frac{1}{2^9} = -\frac{21}{2^{10}}.$$

**Tusnády Gábor**