

1. feladat. *A és B között vasúti ingajárat közlekedik; a B-be megérkező vonat várakozás nélkül visszaindul A-ba. A vasútvonal mellett kötélpálya is vezet. Egy csille egyszerre indult el A-ból a vonattal. Fél óra múlva a csille ugyanannyira volt A-tól, mint a vonat B-től. A csille további 2 km-nyi útja után a két jármű helyzete ismét szimmetrikus lett az AB útszakasz középpontjára nézve. (A vonat közben visszafordult B-ből). Ezután egy negyedóra elteltével a két jármű először találkozott. – Mekkora A és B távolsága és a két jármű sebessége? (Feltesszük, hogy a sebességek állandók.)*

I. megoldás. Az első fél óra után a vonatnak akkora útja van még hátra B-ig, amennyit a csille megtett ez alatt az idő alatt, együttesen tehát annyi utat tettek meg, mint az AB távolság. A harmadik adat szerinti találkozásig viszont a két jármű együtt oda-vissza bejárta az AB távolságot. Ehhez kétszer annyi idő kellett, tehát a találkozás 1 órával az indulás után történt. A második szimmetrikus helyzet 1/4 órával ezelőtt, vagyis 3/4 órával az indulás után következett be. A csille tehát a mondott 2 km-nyi utat az óra harmadik negyedőrája alatt tette meg, így sebessége 8 km óránként.

Eszerint a csille az első szimmetrikus helyzetben 4 km-re, a másodikban 6 km-re volt A-tól. Ugyanannyira volt a vonat e két időpontban B-től, és mivel közben B-ig ment, és onnan visszafordult, a harmadik negyedóra alatt 10 km-t tett meg, sebessége 40 km óránként.

Végül A és B távolsága, mint a járművek fél órai útjának összege, 24 km.

*

A versenyzők túlnyomórészt egyenletrendszer felállításával dolgoztak:

II. megoldás. A vonat és a csille sebességét (km/óra egységben) v_1 , ill. v_2 -vel, az AB távolságot (km-ben) s -sel, a csillének 2 km megtételéhez szükséges idejét (órában) t -vel jelölve a feltételek így írhatók fel:

$$\begin{aligned} v_2 \cdot \frac{1}{2} &= s - v_1 \cdot \frac{1}{2}, & v_2 t &= 2, \\ v_2 \cdot \left(\frac{1}{2} + t\right) &= v_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + t\right) - s, & (v_1 + v_2) \left(\frac{3}{4} + t\right) &= 2s. \end{aligned}$$

Az első egyenletet átrendezve

$$v_1 + v_2 = 2s.$$

Ezt az utolsó egyenletbe helyettesítve és a 0-tól különböző $2s$ -sel egyszerűsítve, majd a 2. egyenletet felhasználva

$$\frac{3}{4} + t = 1, \quad t = \frac{1}{4}, \quad v_2 = \frac{2}{t} = 8.$$

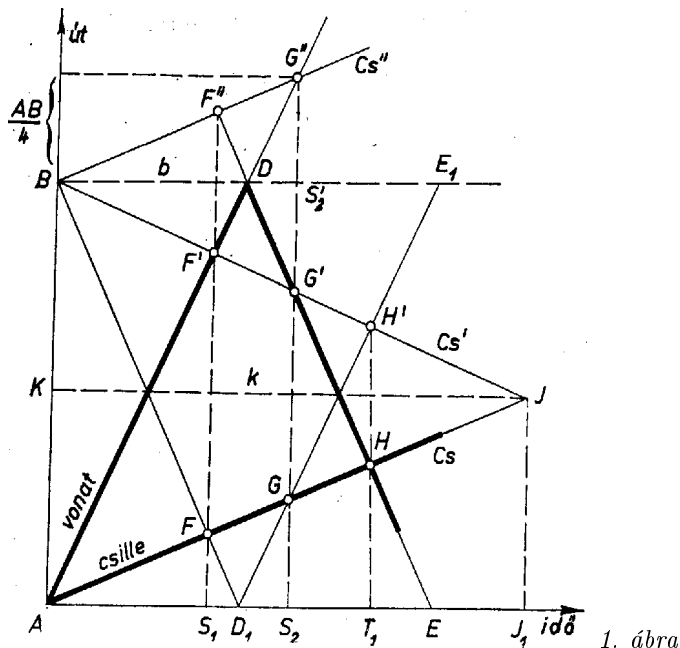
Ezeket az utolsó két egyenletbe helyettesítve és átrendezve

$$\frac{3}{4}(v_1 - 8) = s, \quad v_1 + 8 = 2s,$$

és v_1 -et a második egyenletből az elsőbe helyettesítve

$$\frac{3}{4}(2s - 16) = s, \quad \text{amiből} \quad s = 24 \text{ és } v_1 = 40.$$

Megjegyzés. A gondolatmenet v_2 meghatározásáig láthatóan megegyezik az I. megoldásával.



III. megoldás. Mérjük fel egy derékszögű koordináta-rendszer tengelyeire a vonat útját (A -tól mérve) és az időt (a közös indulástól számítva, 1. ábra). A vonat mozgását ekkor egy B magasságig egyenesen emelkedő, onnan ugyanolyan szögben süllyedő ADE törött vonal ábrázolja, a DE egyenes az AD egyenes tükörképe az idő-tengellyel B -n át húzott b párhuzamosra. Ezzel lényegében megválasztottuk az idő-tengely és az út-tengely egységeinek arányát, ezért a csille mozgásának grafikonjaként csak egyetlen ACs félegyenes felel meg. Éppen ennek megszerkesztését tekintjük feladatunknak, és kérdéseinkre a választ a helyes grafikonpárból fogjuk kiolvasni.

A járműveknek a pályán mutatkozó szimmetrikus helyzetei a grafikonokban is megmutatkoznak, a grafikonok megfelelő pontjai egymás tükörképei arra a k egyenesre nézve, amely átmege az AB szakasz K középpontján és párhuzamos az idő-tengellyel. Ezeket a vonat grafikonjából kimetszi ACs -nek k -ra vonatkozó BCs' tükörképe, legyenek ezek rendre F' , G' , ekkor k -ra való F , G tükörképük ACs -nek ugyanazon abszcisszájú pontja. Másrészt a találkozásnak ACs és a DE grafikonszakasz közös H pontja felel meg.

Legyen F , G , H vetülete az idő-tengelyen rendre S_1 , S_2 , T_1 , így az első szimmetrikus helyzetig eltelt fél órának az idő-tengely AS_1 szakasza felel meg, a második szimmetrikus helyzettől a találkozásig eltelt negyedórának az S_2T_1 szakasz. Mármint AS_1 , S_2T_1 egyenlő az ABF' , illetve $G'GH$ háromszögnek az út-tengelyre merőleges magasságával, e két háromszög pedig hasonló, mert az AB , $G'G$ oldalukon levő szögek a végzett tükrözések miatt páronként egyenlők. Eszerint

$$G'G : AB = S_2T_1 : AS_1 = \frac{1}{4} : \frac{1}{2},$$

tehát $G'G = AB/2$, továbbá $G'S'_2 = S_2G = AB/4$, ahol S'_2 a G' vetülete b -n.

G' -nek b -re vett G'' tükörképe az AD egyenesen van, és itt átmege BCs' -nek b -re vett BCs'' tükörképe is. Másrészt a kétszeri tükrözés miatt BCs'' előáll ACs -nek azzal az eltolásával is, amely A -t B -be viszi. Ezért $GG'' = AB$, és $S_2G'' = 5AB/4 = 5S_2G$, ami meghatározza az AD egyenesen G'' -t és vele BCs'' -t, tehát ACs -t is. Ezek szerint a vonat sebessége 5-ször akkora, mint a csilléé.

Másrészt F' -nek b -re vett tükörképe a DE és BCs'' egyenesek metszéspontja, így $FF'' = AB = 2GG'$, és az $FF''H$, $GG'H$ háromszögek hasonlóak voltak miatt $S_1T_1 = 2 \cdot S_2T_1$ és $S_1S_2 = S_2T_1$, a csillének a két szimmetrikus helyzet közti 2 km-es útszakasz megtételéhez ugyancsak 1/4 órára volt szüksége. Eszerint a csille sebessége 8 km/ó, a vonaté 40 km/ó. Továbbá AT_1 megfelel 1 órának, eddig a vonat és a csille együttes útja 48 km, az AB szakasz kétszerese, tehát $AB = 24$ km.

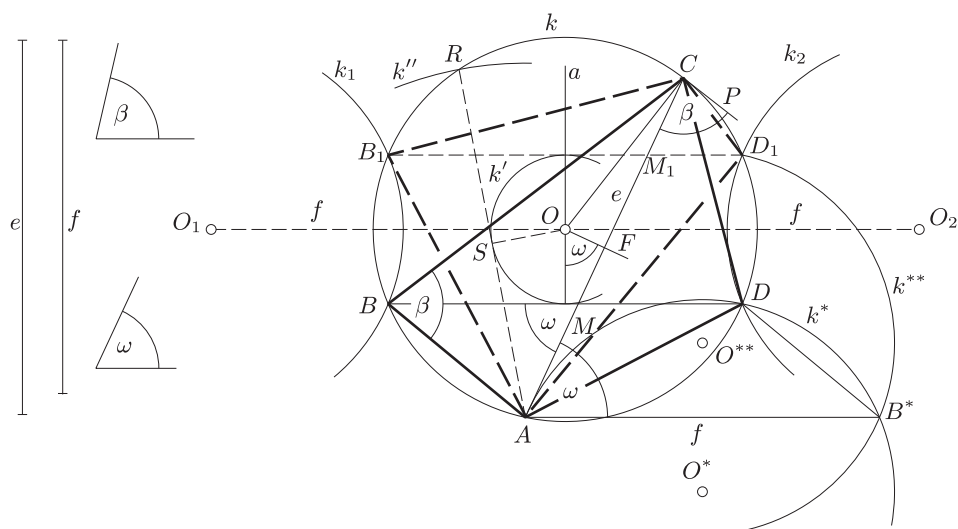
Megjegyzés. Az 1. ábrán a vonat–csille grafikon-pár meghatározásának az a változata is látható, amelyben az F , G találkozási pontokat ACs -ből ADE -nek BD_1E_1 tükörképével metsszük ki (vagyis mintha B -ből is indítanánk vonatot A felé). Ekkor $BD_1 \parallel DE$, $D_1E = BD = AD_1$, $AE = 2AD_1$, és $AFD_1\Delta \sim AHE\Delta$ miatt $AH = 2AF$, $AS_1 = AT_1/2$. Másrészt $AS_1 = 2S_2T$ és $BFF'\Delta \sim G'HH'\Delta$ miatt $FF' = 2HH'$ és ACs -nek k -n levő pontját J -vel jelölve $FF'J\Delta \sim HH'J\Delta$, így $S_1J_1 = 2T_1J_1 = S_1T_1 + T_1J_1$, amit a fentebbiel egybevetve $AS_1 = S_1T_1 = T_1J_1 = AJ_1/3$, és $AF = FH = HJ$. Ebből a tetszés szerint rajzolt ACs egyenesen kijelölhető F és J helyzete, ami $AB = 2AK$ alapján meghatározza BF -et és tükrözéssel AD -t.

2. feladat. Adott egy húrnégyszög két átlója, az átlók szöge és a húrnégyszögnek a hosszabb átlóval szemközti egyik szöge. Szerkesztendő a négyszög.

I. megoldás. Legyen $ABCD$ a feltételeket kielégítő négyszög, $AC = e \geq f = BD$ az adott hosszúságú átlók, metszéspontjuk M , $\angle ABC = \beta$, és $\angle AMB = \omega$ az adott szögek. A betűzés alkalmas választásával feltehetjük, hogy $\omega \leq 90^\circ$.

Az adatokból megszerkeszthető a négyszög köré írható k kör, mint olyan kör, amelynek egyik ívéről az e szakasz β szögben látszik. Ezután f hosszúságú húrt kell elhelyeznünk úgy, hogy az az e hosszúságú húrt ω szögben messe.

A k kör f hosszúságú húrjai felezőpontjukban érintenek egy k' -vel koncentrikus k'' kört. Ehhez kell AC -vel ω szöget bezáró érintőt szerkeszteni.



2. ábra

Ezek alapján a szerkesztés pl. a következő módon végezhető: $AC = e$ hosszúságú szakaszt rajzolunk, és erre $ACP \sphericalangle = \beta$ szöget szerkesztünk; a CP -re C -ben szerkesztett merőlegesnek és az AC -re F felezőpontjában állított merőlegesnek O metszéspontja körül C -n át szerkesztett k kör a négyszög köré írt kör. Ezt pl. A -ból f sugarú körrel egyik irányban elmetsszük az R pontban.

Az AR -re O -ból bocsátott merőleges S talppontján át O körül húzott kör k' . Szerkesszük meg O -n át azt az a egyenest, amelyik AC felező merőlegesének AC felé haladó félegyenésével az egyenes A -t tartalmazó partján ω szöget zár be. Ennek k' -vel való metszéspontjaiban k' -höz húzott érintők (a -ra állított merőlegesek) k -ba eső húrjai f hosszúságúak és egyenesük AC -vel ω szöget zár be, mert e hajlásszög szárai a -ra, ill. OF -re merőlegesek.

Ahhoz, hogy az A és C pont és a most szerkesztett valamelyik húr végpontjai meghatározza négyszögben az e és f hosszúságú húr átló legyen, kell, hogy a kettő messe egymást. Ha ez teljesül, akkor jelöljük D -vel az f hosszúságú húrnak azt a végpontját, amelyik az AC egyenesnek ugyanazon a partján van, mint P , a másik végpontot B -vel. Így a kerületi szögek egyenlősége folytán $ABC \sphericalangle = ACP \sphericalangle = \beta$, ugyanis CP a k kör érintője, mert szerkesztés szerint merőleges az OC sugárra. Ezek szerint az $ABCD$ négyszög megfelel a feladat követelményeinek.

Mindig megszerkeszthető a k kör és $e \geq f$ folytán az AR húr, a k' kör, az a egyenes és erre a k' -vel való metszéspontjaiban állított merőlegesek. A feladatnak nincs megoldása, 1 vagy 2 megoldása van aszerint, hogy az a -ra állított merőlegesek k -ba eső szakaszai nem metszik AC -t, ill. csak az egyikük, vagy mind a kettő metszi.

Megjegyzés. A k kör f hosszúságú, kívánt állású húrjainak végpontjait kimetszhetjük azokkal a k_1, k_2 körökkel is, amelyek k -nak f nagyságú eltolásával adódnak az e -vel ω szöget bezáró (és egymással ellentétes) irányban. $f \leq e$ miatt közös pont mindig van, és a húr megfelel, ha végpontjai AC két oldalán adódnak.

II. megoldás. Tovább is a fenti jelöléseket használjuk. Tükrözzük az AD oldal E felezőpontjára¹ B -t, O -t és k -t, legyen a kép B^*, O^*, k^* . Ekkor egyrészt $ABDB^*$ paralelogramma, $AB^* \# BD$, és $B^*AM \sphericalangle = BMA \sphericalangle = \omega$, váltószögek, mert E , és így B^* is AC -nek B -t nem tartalmazó partján van, M pedig az AC szakaszon. Másrészt D a k és k^* metszéspontja. Így a következő szerkesztéshez jutottunk.

AC -nek, O -nak és k -nak a fentiek szerinti megszerkesztése után felmérjük a $CAB^* \sphericalangle = \omega$ szöget, és új szárára az $AB^* = f$ szakaszt. AB^* mint húr fölé OC sugarú k^* kört szerkesztünk, ennek k -val való metszéspontja D , végül B^* tükörképe AD felezőpontjára nézve B .

A kapott $ABCD$ négyszögben $AC = e$, $BD = AB^* = f$ és $BMA \sphericalangle = MAB^* \sphericalangle = \omega$, továbbá k átmegy B -n, mert k és k^* , mint egyenlő sugarú körök, egymás tükörképei a közös AD húrjuk felezőpontjára nézve, tehát a feltétel alapján $ABC \sphericalangle = \beta$.

B^* egyértelműen szerkeszthető és D létrejön, mert k -nak és k^* -nak van közös pontja: A .

k^* helyett AB^* -ra való k^{**} tükörképét használva újabb megoldást kapunk. A megoldások megfelelnek, ha D az AC egyenes B^* -ot tartalmazó partján adódik, számuk legfeljebb 2.

3. feladat. Alakítsuk két polinom szorzatává az

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

kifejezést.

I. megoldás. Olyan felbontást keresünk, melyben mindkét tényező-polinom másodfokú és x^2 együtthatója mindkettőben 1. Feladatunk a további p, q , illetve r, s együtthatók meghatározása úgy, hogy

$$\begin{aligned} (x^2 + px + q) \cdot (x^2 + rx + s) &= x^4 + (p+r)x^3 + (q+pr+s)x^2 + (qr+ps)x + qs = \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

azonosság legyen. Ez teljesül, ha x^3, x^2, x együtthatója és az x -et nem tartalmazó tag a két oldalon rendre egyenlő, azaz, ha

$$\begin{array}{ll} (1) & p+r=1, \\ (2) & q+pr+s=1, \\ (3) & qr+ps=1, \\ (4) & qs=1. \end{array}$$

(3)-at q -val megszorozva, (1) és (4) felhasználásával kiküszöbölhetjük r -et és s -et. (1)-ből $r=1-p$, így

$$\begin{aligned} q^2r + qps &= q^2(1-p) + p = q, \\ (5) \quad q^2 - q - p(q^2 - 1) &= (q-1)(q-pq-p) = 0. \end{aligned}$$

Ez mindenesetre teljesül, ha $q=1$, amikor (4)-ből $s=1$, (2)-ből $pr=-1$, és (1)-et is tekintetbe véve p és r a

$$(6) \quad (z-p)(z-r) = z^2 - (p+r)z + pr = z^2 - z - 1 = 0$$

¹ Az ábrán E pótlendő.

egyenlet gyökei, tehát az $(1 + \sqrt{5})/2$ és $(1 - \sqrt{5})/2$ értékek. Ezekkel fennáll a

$$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1\right) \left(x^2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x + 1\right)$$

azonosság. Ezzel megkaptunk egy kívánt alakú felbontást.

Megjegyzések. 1. Egy első és egy harmadfokú, valós együtthatós tényezőre való felbontás nem létezik, mert különben volna $P(x)$ -nek valós 0-helye, de az a talált felbontás valamelyik tényezőjének is 0-helye volna. Ámde mindkét tényező diszkriminánsa negatív, s így egyiknek sincs valós 0-helye.

2. Világos, hogy $q = 1$ választás mellett a föntin kívül csak olyan, két másodfokú valós együtthatós tényezőből álló felbontás nyerhető, amelyik abból az egyik tényezőnek egy 0-tól különböző c számmal, a másiknak $1/c$ -vel való szorzásával keletkezik. Ha viszont a $q - pq - p = 0$ egyenletből indulunk ki, akkor (2)-ből pl. p -re negyedfokú egyenletet nyerünk, ami teljes négyzetté kiegészítésén keresztül másodfokú tényezőkre bontható, de azok egyikének sincs valós 0-helye. Így nincs a fentitől lényegesen különböző, valós együtthatós felbontás másodfokú tényezőkre sem.

II. megoldás. A polinomot $x^2 + 1$ hatványai szerint rendezhetjük:

$$P(x) = x^4 + 1 + x(x^2 + 1) + x^2 = (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) - x^2.$$

Egészítsük ki az első két tagot teljes négyzetté, így két négyzet különbsége keletkezik, amit már szorzattá alakíthatunk:

$$P(x) = \left(x^2 + 1 + \frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{5}{4}x^2 = \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1\right).$$

Megjegyzések. 1. Az eljárás általában alkalmazható $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ alakú, ún. szimmetrikus polinomokra, és nem különbözik lényegesen attól a szokásos eljárástól, amely szerint a polinom $1/x^2$ -szeresét az $y = x + \frac{1}{x}$ új változóval fejezzük ki.

Az itt vázolt úton mindig eljutunk két, valós együtthatós másodfokú tényezőre bontáshoz, ha $a^2 - 4b + 8 \geq 0$.

2. Az I. megoldás gondolatmenete is alkalmazható az említett általánosabb esetben, és célra vezet, bármilyen értékek is az együtthatók.

Lőrincz Pál–Bakos Tibor–Tusnádý Gábor–Surányi János