

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely társaságban található két olyan ember, akiknek abban a társaságban ugyanannyi ismerősük van.

I. megoldás. Legyen a társaság tagjainak száma n ; mivel társaságról van szó, $n \geq 2$. Ekkor a társaság egy tagjának 0, vagy 1, vagy ..., vagy $n - 1$ ismerőse lehet jelen. Nem lehet azonban olyan is, akinek nincs ismerőse a társaságban, meg olyan is, akinek $n - 1$ ismerőse van, hiszen az utóbbinak a társaság minden tagja ismerőse, és ez legalább 1 ismerőst jelent, mert $n \geq 2$. Így, ha mindenki megmondja, hány ismerőse van jelen, akkor n ember legfeljebb $n - 1$ különböző számot mondhat, tehát legalább ketten ugyanazt a számot mondják, vagyis ugyanannyi ismerősük van jelen.

II. megoldás. Legyen a társaság n -tagú; $n \geq 2$, mert 1 embert nem mondunk társaságnak. Ekkor egy embernek 0, vagy 1, vagy ..., vagy $n - 1$ ismerőse lehet jelen, ez összesen n lehetőség, tehát mindegyiknek elő kellene fordulnia, ha mindenkinek más-más számú ismerőse volna jelen. De ekkor a senkit sem ismerő távozásával senki ismerőseinek a száma nem változnék, tehát a visszamaradó $n - 1$ (legalább 1) ember közül is mindenkinek más-más számú ismerőse volna jelen. Ekkor azonban ezek közt is volna, akinek nincs jelen ismerőse. Mivel ennek az eltávozott sem ismerőse, tehát az eredeti társaságban legalább 2 embernek nem lett volna ismerőse, holott éppen azt tettük fel, hogy eredetileg mindenkinek más számú ismerőse volt jelen. Ez a feltevés tehát helytelen-nek bizonyult, s így a feladat állítása a helyes.

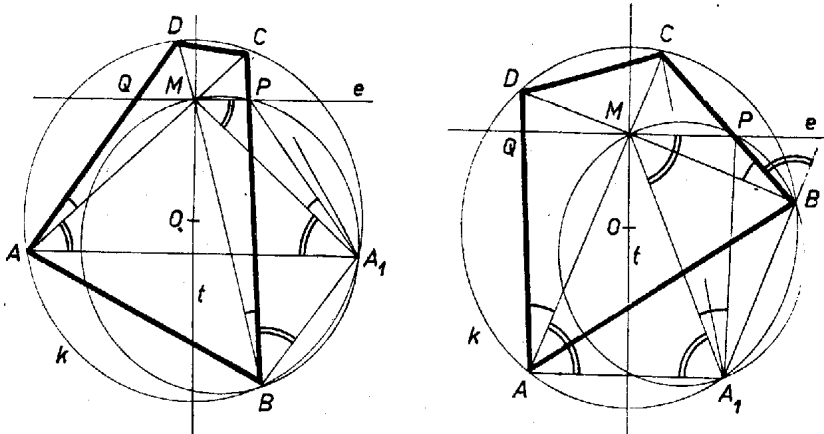
2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrnégyszög átlóinak M metszéspontján átmenő egyenesnek a négyszög belsejébe eső szakaszát M felezi, akkor M felezi a körülírt körnek az említett egyenesre eső húrját is.

I. megoldás. Legyen az e egyenesnek a négyszög belsejébe eső szakasza PQ , és M felezze PQ -t. Ha e azonos a négyszög egyik átlójával, akkor a feladat állítása semmitmondó. Feltehetjük tehát, hogy e a két átló között halad, így a négyszöget szemközti oldalain metszi. Válasszuk úgy a betűzést, hogy P a négyszög BC , Q a DA oldalszakaszán legyen. Tükrözzük az A csúcsot a PQ szakasz t felező merőlegesére, kapjuk az A_1 pontot. Megmutatjuk, hogy A_1 rajta van az $ABCD$ négyszög köré írt k körön.

$AA_1 \parallel PQ$, hiszen mindkettő merőleges t -re. $\angle PMA_1 = \angle MA_1A$, mert váltószögek, $\angle MA_1A = \angle MAA_1$ a tükrözés miatt, és ez utóbbi azonos a $\angle CAA_1$ szöggel, tehát $\angle PMA_1 = \angle CAA_1$. (Az 1.a - 1.b ábrákon t szétválasztja A -t és B -t.) Az A_1, B, P, M pontok egy körön vannak, hiszen

$$\angle PBM = \angle CBD = \angle CAD = \angle MAQ = \angle MA_1P,$$

egyrészt a kerületi szögek tétele, másrészt a tükrözés miatt, és mert az A_1, B pontok az MP egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak. Ha az A és B pontok az A_1C egyenes azonos oldalán vannak, akkor a B és M pontok is ugyanazon az oldalán vannak az A_1P egyenesnek, így az A_1P szakasz a B és M pontokból egyenlő szögben látszik.



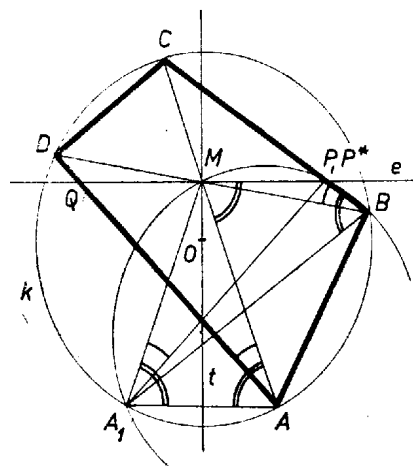
1.a és 1.b ábra

Mivel $\angle A_1BP$ és $\angle A_1BC$ szögek azonosak, a $\angle PMA_1$ és $\angle CAA_1$ szögek pedig egyenlők, az A_1C szakasz is ugyanakkora szögben látszik az A és B pontokból, A_1 tehát valóban rajta van az A, B, C pontok által meghatározott k körön.

Ugyanezt kapjuk, ha az A_1C egyenes elválasztja az A és B pontokat (1.b ábra). Ebben az esetben az A_1P egyenes is elválasztja az M és B pontokat, az $\angle A_1BP$ és $\angle PMA_1$ szögek tehát 180° -ra egészítik ki egymást, így az $\angle A_1BC$ és $\angle CAA_1$ szögek is 180° -ra egészítik ki egymást, és A_1 most emiatt lesz a k körön.

Hasonlóan adódik állításunk, ha A és B a t -nek ugyanazon oldalán van (2. ábra).

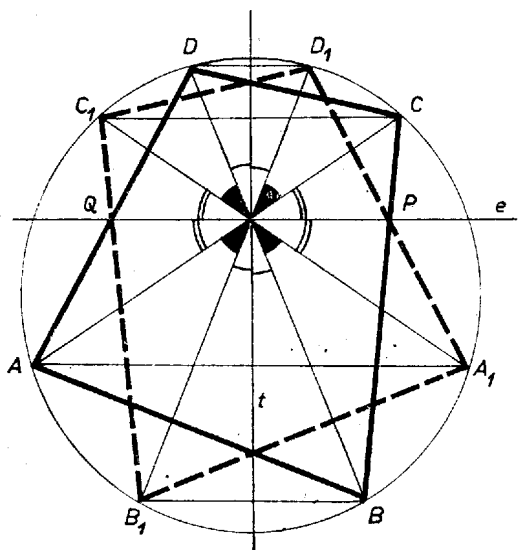
Mivel A_1 a k körön van, az AA_1 szakasz felezőmerőlegese, a t egyenes a k kör átmérője, így felezi a rá merőleges e egyenesre eső húr, amint azt bizonyítanunk kellett.



2. ábra

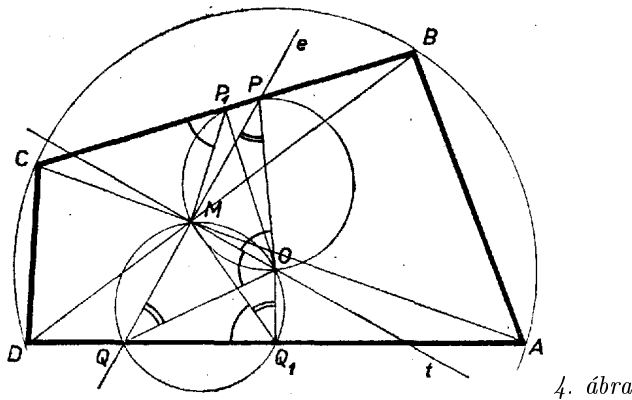
Megjegyzések. 1. Lényegében ugyanígy halad a megoldás, ha a t egyenest eleve az M -en átmenő átmérőnek vesszük fel (2. ábra). Ebben az esetben A_1 nyilván a k körre kerül, ellenben bizonyítanunk kell, hogy PQ is merőleges t -re. Mivel ezt nehéz közvetlenül belátni, a versenyzők többsége a feladat állításának a fordítottját bizonyította, hogy ti. ha egy az M -en átmenő e egyenesnek M a körre eső húrját felezi, akkor felezi a négyszögbe eső szakaszát is. Ha M és k kör O középpontja azonos, akkor - mint az könnyen látható - minden egyenesnek megvan mindkét tulajdonsága. Ha M és O nem azonos, akkor M nyilván akkor felezi az e egyenesre eső húr, ha $e \perp OM$. Ha tehát belátjuk egyrészt, hogy ebből következik, hogy M felezi az e egyenes négyszögbe eső szakaszát, másrészt, hogy olyan egyenes is csak egy van, amelyiknek a négyszögbe eső szakaszát M felezi, akkor e kettő együtt kiadja a feladat állításának a bizonyítását. Az első rész a fenti megoldáshoz hasonló módon bizonyítható: mivel $PMA_1 \sphericalangle = A_1AC \sphericalangle$, az A_1, B, P, M pontok egy körön vannak, tehát $PA_1M \sphericalangle = PBM \sphericalangle$, viszont ez teljesül a Q pont tükrözéséből származó P^* pontra is: $P^*A_1M \sphericalangle = PBM \sphericalangle$, P^* tehát azonos P -vel. A második rész bizonyításával kapcsolatban a II. megoldás első mondataira utalunk.

2. Ha az egész négyszöget tükrözzük az OM egyenesre, akkor P és Q a megfelelő oldalak metszéspontja lesz, és azt kell megmutatnunk, hogy $PQ \perp OM$. Valóban, az M pontban keletkezett 12 szög közül a 3. ábrán azonosan jelzettekről könnyen kimutatható, hogy egyenlőek, amiből már következik az állításunk. Ebben az esetben azonban fel kell használnunk, hogy olyan egyenes, amelyen levő húr M felezi, ill. olyan egyenes, amelynek a négyszögre eső szakaszát M felezi, csak egy van, mert csak ennek belátása után következik a feladatunk állítása abból, hogy az általunk adott konstrukció mellett a PQ egyenesnek mindkét tulajdonsága megvan.



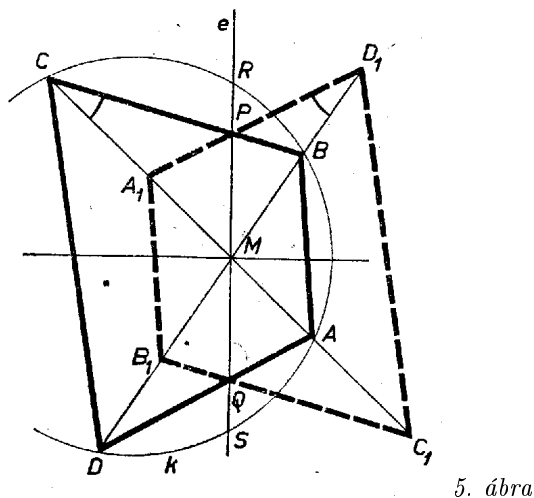
3. ábra

3. Azt viszont, hogy ha M felezi PQ -t, akkor a PQ szakasz t felező merőlegese átmegy a k kör középpontján, tükrözés nélkül is beláthatjuk (4. ábra). Legyen Q_1 az AD , P_1 a BC szakasz felezőpontja. Feltehetjük, hogy a Q_1 pontból a DM szakasz látszik hegyesszög alatt, ekkor az AMD, BMC háromszögek hasonlósága miatt a P_1 pontból ugyanakkora α szög alatt látszik a CM oldal. Attól függően, hogy a P , ill. a Q pont a P_1C , ill. Q_1D szakaszra esik-e vagy sem, az MP , ill. MQ szakasz vagy α , vagy $180^\circ - \alpha$ szög alatt látszik a P_1 , ill. Q_1 pontokból.



Keressük meg a t egyenesnek az e egyenes A és B csúcsokat tartalmazó oldalára eső félegyenesén azt az O pontot, ahonnan az MP és MQ szakaszok α szög alatt látszanak. Akkor az O, P, P_1, M , ill. O, Q, Q_1, M pontok egy-egy körön lesznek, melyeknek OP és OQ átmérői, az OP_1P, OQ_1Q szögek tehát derékszögek, így O a k kör középpontjával azonos.

II. megoldás. Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget és a köré írható k kört a négyszög átlóinak M metszéspontjára. Ha M mindkét átlót felezi, a négyszög és a k kör önmagába megy át, ebben az esetben az M ponton átmenő egyeneseknek a négyszögbe és a körbe eső szakaszát is felezi M , állításunk tehát igaz. Ha M csak egy átlót felez, válasszuk úgy a betűzést, hogy ez az AC átló legyen, és teljesüljön, hogy $BM < MD$. Akkor a tükrözés során az A és C csúcsok helyet cserélnek, a B csúcs és a belőle kiinduló AB , BC oldalak a négyszög belsejébe, a D csúcs és a belőle kiinduló CD , DA oldalak a négyszögon kívülre kerülnek, így csak az AC átlónak felezi M a négyszögbe eső darabját, AC viszont egyben a k -nak is húrja, állításunk tehát ismét nyilvánvaló.



A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy M egyik átlót sem felezi. Válasszuk úgy a betűzést, hogy az AC átlón A , a BD átlón B legyen az M -hez közelebbi csúcs (5. ábra). A tükrözés során kapott A_1 és B_1 csúcs az eredeti négyszög belsejében lesz, a C_1 , D_1 csúcs pedig azon kívülre kerül, így csak a BC és A_1D_1 , ill. DA és B_1C_1 szakaszok metszhetik egymást a tükrözött és az eredeti négyszög területén. Legyenek a metszéspontok P és Q , ekkor csak a PQ egyenesnek felezheti M a négyszögbe eső szakaszát. A kapott BD_1P és A_1CP háromszögek hasonlóak, hiszen P -nél levő szögük egyenlő és

$$A_1CP_{\triangleleft} = ACB_{\triangleleft} = ADB_{\triangleleft} = A_1D_1B_1_{\triangleleft} = PD_1B_{\triangleleft},$$

emiatt

$$\frac{A_1P}{PC} = \frac{BP}{PD_1}.$$

A tükrözés miatt viszont $A_1P = AQ$ és $PD_1 = QD$, tehát

$$AQ \cdot QD = BP \cdot PC,$$

azaz a P és Q pontoknak a k körre vonatkoztatott hatványuk egyenlő. (Ismeretes, hogy egy k körhöz adott P pontból húzott szelő darabjainak szorzata független a szelő választásától - ezt a szorzatot nevezzük a P pont k körre vonatkozó

hatványának.) Ebből már következik a bizonyítandó állítás, hiszen ha a PQ egyenes a k kört az R, S pontokban metszi, és $PS > QS$, akkor

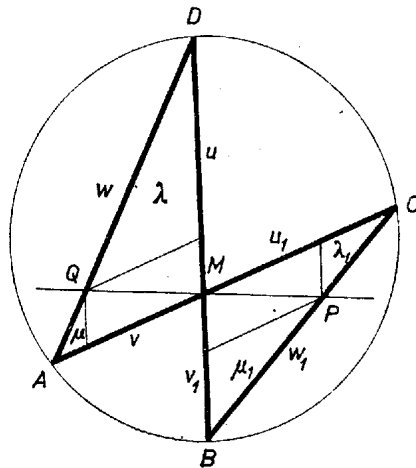
$$RP \cdot PS = RQ \cdot QS,$$

és mindkét oldalból $RP \cdot QS$ -t levonva kapjuk, hogy

$$RP(PS - QS) = (RQ - RP)QS,$$

ahol $PS - QS = PQ = RQ - RP$, tehát valóban $RP = QS$, azaz $RM = MS$.

Megjegyzések. 1. Azt, hogy a P, Q pontok k -ra vonatkozó hatványa egyenlő, tükrözés nélkül is beláthatjuk.



6. ábra

Húzzunk P -n és Q -n át párhuzamosakat az AC, BD átlókkal (6. ábra), így az egymáshoz hasonló ADM, BCM háromszögek mindegyikét egy paralelogrammára és két háromszögre vágtuk fel. A keletkezett négy kis háromszög hasonló az eredeti háromszögekhez, a paralelogrammák is hasonlóak, és mivel PM és MQ átlóik egyenlők, egybevágóak is. Legyenek az ADM és BCM háromszögek oldalai rendre u, v, w , ill. u_1, v_1, w_1 , és a DQ, QA , ill. CP, PB alapú kis háromszögek oldalai a megfelelő nagy háromszögek oldalainak rendre λ, μ , ill. λ_1, μ_1 -szeresei. Az AC átlóval párhuzamos oldalt a DQ és PB alapú, a BD átlóval párhuzamos oldalt pedig a QA, PC alapú háromszögben felírva kapjuk, hogy

$$\lambda v = \mu_1 u_1; \quad \mu u = \lambda_1 v_1,$$

ezeket összeszorozva

$$\lambda \mu u v = \lambda_1 \mu_1 u_1 v_1,$$

Az ADM, BCM háromszögek hasonlósága miatt

$$u : w = u_1 w_1 \quad \text{és} \quad v : w = v_1 : w_1,$$

ezt a két aránypárt összeszorozva kapjuk, hogy

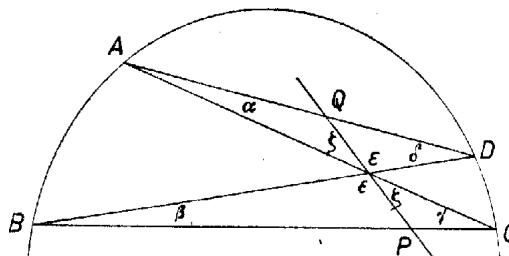
$$uv : w^2 = u_1 v_1 : w_1^2.$$

Ebből következik, hogy

$$\lambda w \cdot \mu w = \lambda_1 w_1 \cdot \mu_1 w_1,$$

ami épp a bizonyítandó egyenlőség:

$$DQ \cdot QA = CP \cdot PB.$$



7. ábra

Beláthatjuk ezt a szinusztétel felhasználásával is (7. ábra):

$$\frac{BP}{QD} = \frac{BP}{MP} : \frac{QD}{QM} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} : \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} = \frac{\sin \zeta}{\sin \alpha} : \frac{\sin \zeta}{\sin \gamma} = \frac{AQ}{QM} : \frac{PC}{MP} = \frac{AQ}{PC}.$$

2. Ha felhasználjuk, hogy két egymást metsző körre azon pontok mértani helye, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő, a két kör metszéspontjain átmenő egyenes, akkor megoldásunk rövidebben is befejezhető. A P pontnak a k körre vonatkozó hatványa $BP \cdot PC$, a k' körre vonatkozó hatványa $A_1P \cdot PD_1$, mivel ez a két szorzat az A_1BD_1C húrnégyszögben egyenlő, P - és hasonló módon Q is - rajta van a k és k' körök hatványvonalán, így a két kör centrális merőleges PQ -ra, a tükrözés miatt átmegy M -en, és felezi a k kör PQ egyenesre eső húrját.

3. feladat. a) Keressünk meg minden olyan természetes számot, amelynek négyzetében mindegyik számjegy helyébe ugyanazzal a d pozitív számmal kisebb jegyet írva, a keresettnél d -vel kisebb természetes szám négyzetét kapjuk.

b) Hány megoldása van a feladatnak tetszés szerinti alapú számrendszerben?

Megoldás. a) Legyen a keresett szám x , a nála d -vel kisebb szám y , és x^2 számjegyeinek száma k . Jelöljük a k darab 1-essel felírt számot C -vel, ekkor a feladat szerint

$$x^2 - y^2 = d \cdot C, \quad (1) \quad x - y = d. \quad (2)$$

A bal oldalon $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y) = d(x + y)$, tehát $d(x + y) = d \cdot C$, amit d -vel osztva ($d > 0$)

$$(3) \quad x + y = C.$$

Így $x > y$ miatt $2x > C$, azaz $4x^2 > C^2$. Viszont x^2 és C jegyeinek száma k , ezért $C \geq 10^{k-1}$, $C^2 \geq 10^{2k-2}$, és $10^k > x^2$, tehát

$$4 \cdot 10^k > 4x^2 > C^2 \geq 10^{2k-2}.$$

A két szélső tagból kapott egyenlőtlenség alapján $4 > 10^{k-2}$, amiből következik, hogy $k \leq 2$. Nem lehet azonban $k = 1$, mert $C = x + y > 1$, tehát $k = 2$, $C = 11$, és x^2 kétjegyű szám, tehát x egyjegyű. Mivel így $x + y = 11$, azért $10 > x > y$, és (2)-re is tekintettel x , y és d szóba jövő értékei:

$$\begin{array}{llll} x = & 6, & 7, & 8, & 9, \\ y = & 5, & 4, & 3, & 2, \\ d = & 1, & 3, & 5, & 7. \end{array}$$

Ezekkel

$$\begin{array}{llll} x^2 = & 36 & 49 & 64, & 81, \\ y^2 = & 25, & 16, & 9, & 4. \end{array}$$

A harmadik és negyedik értékrendszer esetében x^2 második számjegye kisebb d -nél, ezek nem megoldásai a feladatnak. Az első két értékrendszer a feladat minden követelményét kielégíti, a keresett számok tehát 6 és 7.

b) Legyen a számrendszer alapszáma a . Az előző megfontolások egy részét átvehetjük, a többjegyű számokat az a -alapú számrendszerben értve. (1), (2) és (3) továbbra is érvényes, és a $4 > 10^{k-2} = (1 \cdot a + 0)^{k-2}$ egyenlőtlenség is érvényes marad, tehát

$$(4) \quad a^{k-2} < 4,$$

és $k > 1$, hiszen $C = x + y > 1$ is változatlanul fennáll.

Nem lehet a sem 2, sem 3. Ugyanis a d számjegye $a - 1$ -nél kisebb, mert különben x^2 -ből az ugyanannyi $a - 1$ jegyből álló számot levonva nem kaphatunk pozitív maradékot. Ilyen pozitív d nincs, ha $a = 2$; az $a = 3$ esetben pedig d csak 1 lehetne. Ekkor a (3)-ból és (2)-ből adódó

$$x = \frac{C + d}{2}$$

összefüggés szerint C páratlan, így k értéke nem lehet 2, tehát (4)-et figyelembe véve $k = 3$, így $x = 7$, és 7^2 a 3-alapú számrendszerben már több mint 3-jegyű.

Minden $a \geq 4$ alapszám esetében (4) alapján $k \leq 2$, tehát $k = 2$, $C = a + 1$ és x^2 kétjegyű, ezért $x^2 < a^2$, x egyjegyű, azaz $x < a$.

$$(5) \quad x + y = a + 1$$

és $x > y$ alapján y szóba jövő értékei 2, 3, 4, ..., a_0 , ahol a_0 az a legnagyobb egész szám, amelyre még $a_0 < a + 1 - a_0$, azaz $2a_0 < a + 1$.

Ha a páros, $a = 2u$, akkor $a_0 = u = \frac{a}{2}$, ha a páratlan, $a = 2u + 1$, akkor $a_0 = u = \frac{a-1}{2}$, tehát a_0 mindenképpen az a legnagyobb egész szám, amelyik még nem nagyobb $\frac{a}{2}$ -nél, a szokásos jelöléssel $a_0 = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$.

Minden ilyen y esetén $x = a + 1 - y$ és $d = x - y = a + 1 - 2y$ kielégíti (1)-et és (2)-t, továbbá x^2 kétjegyű, hiszen $x > \frac{C}{2} > \frac{a}{2}$ miatt

$$x^2 > \frac{a^2}{4} \geq a.$$

Az x , y , d számhármaskor akkor megoldásai feladatunknak, ha x^2 mindkét számjegye külön-külön d -vel nagyobb y^2 megfelelő jegyénél. Ha ez a feltétel a második jegyekre teljesül, vagyis az

$$x^2 = y^2 + dC = y^2 + (d + ad)$$

összeadást jegyenként végezve (először a d , majd az ad tagot adva hozzá) $y^2 + d$ első számjegye ugyanaz, mint y^2 első jegye, akkor teljesül az első jegyekre is. Így ugyanis nem viszünk át maradékot, az ad tag az y^2 -nek a helyi értékű jegyét növeli d -vel, és x^2 első jegyét adja, mert itt nem lehet maradékátvitel, hiszen $x^2 < a^2$.

A második jegyek nagyságviszonyának vizsgálatát megkönnyíti a következő észrevétel: Legyen $z = y - 1$, ekkor x^2 és z^2 második számjegye megegyezik, hiszen így $x + z = a$, tehát $x^2 - z^2 = (x + z) \cdot (x - z) = a(x - z)$, különbségük osztható a -val. Elegendő tehát azoknak az y -értékeknek a számát meghatározni, melyek négyzetének második jegye kisebb a náluk 1-gyel kisebb z szám négyzetének második jegyénél. Ez $z < y$ miatt csak úgy lehetséges, hogy z^2 első jegye kisebb y^2 első jegyénél, mégpedig pontosan 1-gyel, hiszen $y^2 - z^2 = y + z = 2y - 1 < x + y - 1 = a$.

Eszerint az $y = 2, 3, \dots, a_0$ számok négyzetében első jegyként minden számjegy előfordul a_0^2 első jegyéig ($a > 4$ esetén 0 is), és minden előforduló kezdő számjegyre pontosan 1 megfelelő y -érték tartozik, mégpedig a legkisebb azok közül a számok közül, amelyeknek négyzete az illető számjeggyel kezdődik. Ha y^2 első számjegye 0, akkor y -hoz nem tartozik megoldása a feladatnak, hiszen ekkor a $z = y - 1 \geq 1$ szám négyzetének második számjegye mindig kisebb y^2 második jegyénél. Így a feladatnak megfelelő y -értékek (és x , y , d értékrendszerek) száma egyenlő a_0^2 első számjegyével. Ezt megadja az $a_0^2 : a$ hányados egész része, tehát a megoldások száma

$$\left\lceil \frac{1}{a} a_0^2 \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{a} \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil^2 \right\rceil.$$

Eredményünk megfelel az a) részben kapott eredményünknek, hiszen $a = 10$ esetén $a_0 = 5$, és a_0^2 első jegye 2.

Tusnady Gábor