

A vektorok mibenléte és a velük végzett legegyszerűbb műveletek (összeadás, kivonás, összetevőkre bontás) ismeretesek a középiskolai tanulmányokból. Vektorokra azonban nemcsak ezek a műveletek értelmezhetők, hanem két vagy több vektor szorzása is. A következőkben bemutatott néhány egyszerű példa azt szeretné illusztrálni, mennyire megkönnyítik az ilyen műveletek a fizikai és geometriai összefüggések, törvények felírását és az azokkal való számolást.

Természetesen egy új műveletet értelmezhetünk teljesen önkényesen, de általában vannak bizonyos célszerűségi szempontok vagy megszorítások. (Például a negatív és tört kitevőjű hatványt úgy definiáljuk, hogy a hatványozás pozitív egész kitevőkre vonatkozó ismert azonosságai továbbra is érvényben maradjanak.) Mivel a vektorokat két adat (nagyság és irány) jellemzi, még a célszerűségi szempontok figyelembevételével is a szorzást többféleképpen értelmezzük.

### Vektorok szorzása skaláris mennyiséggel

Legyen  $m$  tetszőleges valós szám. Az  $m\mathbf{a}$  vektoron azt a vektort értjük melynek iránya  $\mathbf{a}$ -éval egyező, illetőleg  $m < 0$  esetén vele ellentétes, nagysága pedig az  $\mathbf{a}$ -énak  $|m|$ -szerese. Ez természetszerűleg adódik a szorzásnak mint ismételt összeadásnak az értelmezéséből.

Könnyen belátható, hogy a szorzás e fajtája asszociatív és disztributív a következő értelemben:

$$(mn)\mathbf{a} = m(n\mathbf{a}); \quad (m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}, \\ m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m(\mathbf{b} + \mathbf{a}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}.$$

### Vektorok skaláris szorzata

$\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok skaláris szorzatán az  $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$  skaláris mennyiséget értjük, melynél  $\varphi$  a két vektor által bezárt ( $180^\circ$ -nál kisebb) szög. Jele:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{ab} \quad \text{vagy} \quad (\mathbf{ab}).$$

Nyilván érvényes a kommutativitás és disztributivitás:

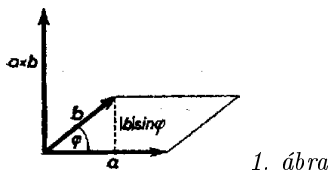
$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}; \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

Az asszociatív törvény nem érvényes, hiszen általában  $(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{bc})$ . (Itt kétféle szorzás szerepel!) Ennek a szorzásnak az az érdekessége, hogy a szorzat akkor is lehet nulla, ha egyik tényező sem az, hanem egymásra merőlegesek. Két vektor merőleges voltát tehát így fejezhetjük ki:  $\mathbf{ab} = 0$ . (A nullvektort bármely vektorra merőlegesnek tekintjük.) Megjegyezhetjük még, hogy  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$ . Továbbá, hogy ha  $|\mathbf{b}| = 1$  (egységvektor), akkor  $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi$ , ami nyilván az  $\mathbf{a}$  vektornak a  $\mathbf{b}$  irányába eső vetülete.

### Vektorok vektoriális szorzata

Két vektor vektoriális szorzatán ( $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vagy  $[\mathbf{ab}]$ ) azt a vektort értjük, melynek nagysága  $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$  ( $\varphi$  a két vektor által bezárt,  $180^\circ$ -nál kisebb szög), iránya pedig merőleges a két tényezővektorra, továbbá  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  sorrend szerint úgy állnak, mint a jobb kéz egymásra merőlegesen állított hüvelyk-, mutató- és középső ujjja. (Jobbsodrású rendszer.)

A meghatározás mutatja, hogy tulajdonképpen irányított területről van szó, mert a vektori szorzat nagysága a két tényező által kifeszített paralelogramma területe (1. ábra).



1. ábra

Itt is igaz, hogy a szorzat lehet nulla, ha a két tényező nem is az; ha ti. a két vektor párhuzamos egymással. Ezért a párhuzamosságot így is kifejezhetjük:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ . (A nullvektort bármely vektorral párhuzamosnak vesszük.) A felcserelési törvény nem érvényes, mert a sinus-függvény páratlan voltából kifolyólag

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

A csoportosítási törvény sem érvényes, de a disztributivitás igen:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

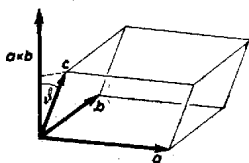
Ennek bizonyítása, ha a három vektor egy síkban van, egyszerű, de általános esetben sem nehéz, inkább hosszadalmas, s ezért mellőzzük.

### Vegyes szorzat

Természetesen az előbbi szorzatfajtákat különféleképpen lehet kombinálni. Így nyerjük pl. az  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ , ún. vegyes szorzatot, mely könnyen beláthatólag az  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorokból alkotott paralelepipedon előjeles köbtartalmával egyenlő, mivel  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  az alapterület és  $|\mathbf{c}| \cdot \cos \vartheta$  a magasság (2. ábra). Erre érvényes az alábbi azonosság:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

így ezt röviden **abc**-vel jelöljük.



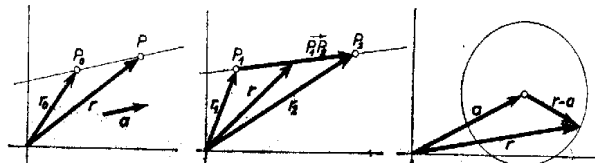
2. ábra

Gyakorlásul ellenőrizhetjük a következő összefüggések helyességét:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 0 \quad \text{és} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

### Alkalmazások

Az előbb ismertett műveletek a geometriában (főként az analitikus geometriában) igen leegyszerűsítik az összefüggések felírását és nagyon szemléletesek. Pl. a cosinus-tétel így írható:  $(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2$ .



3., 4. és 5. ábra

Egy  $P_0$  ponton átmenő és egy  $\mathbf{a}$  vektorral párhuzamos egyenes egyenlete, ha  $\mathbf{r}_0$  a  $P_0$  helyvektora és  $\mathbf{r}$  a változó vektor:  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a} = 0$  vagy  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = m\mathbf{a}$  (3. ábra). Két ponton átmenő egyenes egyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \overrightarrow{P_1 P_2} = 0 \quad \text{vagy} \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = m\overrightarrow{P_1 P_2} \quad (4. \text{ ábra}).$$

A kör egyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 = R^2 \quad (5. \text{ ábra}).$$

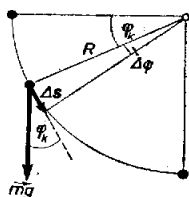
Számunkra azonban fontosabbak a fizikai alkalmazások. A legfontosabbak közül is csak néhányat említünk.

*Munka.* Ismeretes a  $\vec{P}$  erő által  $\mathbf{s}$  elmozdulás alatt végzett munka meghatározása, mely vektori alakban így írható:

$$L = \vec{P} \cdot \mathbf{s} = P \cdot |\mathbf{s}| \cos \varphi.$$

Valóban ez a szorzat az útnak és az út irányába eső erőkomponensnek a szorzata.

Természetesen görbe vonalú mozgás esetén a megtett utat egyenesnek tekinthetjük, igen kicsi  $\Delta s$  szakaszokra bontjuk és így képezzük az elemi munkát:  $\Delta L = \vec{P} \cdot \Delta \mathbf{s}$ , s ezeket összegezzük az egész útra:  $L = \sum \vec{P} \cdot \Delta \mathbf{s}$ . Általában ez csak az integrálszámítás segítségével végezhető el. Egyszerűbb esetben azonban nélküle is célhoz lehet jutni. Vegyük például egy matematikai inga esetét, amikor keressük, mennyi munkát végez a nehézségi erő, míg az  $m$  tömeget vízszintes helyzetből a legmélyebb helyzetbe hozza.



6. ábra

Osszuk fel a negyedkörívet  $n$  darab  $\Delta s$  hosszúságú ívre (6. ábra). Legyen egy ilyen ívdarabhoz tartozó központi szög  $\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{R}$ . A  $k$ -adik osztópontához tartozó szögelmozdulás  $\varphi_k = k\Delta \varphi$ . Így a  $k$ -adik  $\Delta s$ -hez tartozó elemi munka  $\Delta L = mg \cdot \Delta s \cdot \cos \varphi_k$ . A teljes munka:

$$L = mg R \sum_{k=1}^n \Delta \varphi \cdot \cos \varphi_k.$$

Ezt az összeget kell meghatározni. Mivel  $\Delta\varphi$  nagyon kicsi, azért  $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$  (relatív is kis hibát követünk el),  $\cos \Delta\varphi \approx 1$ , és így

$$\begin{aligned}\Delta\varphi \cdot \cos \varphi_k &\approx \sin \Delta\varphi \cdot \cos \varphi_k + \cos \Delta\varphi \cdot \sin \varphi_k - \\ &- \cos \Delta\varphi \sin \varphi_k = \sin(k+1)\Delta\varphi - \sin k\Delta\varphi.\end{aligned}$$

Összegezve

$$\sum_{k=1}^n \Delta\varphi \cdot \cos \varphi_k = \sum_{k=1}^n [\sin(k+1)\Delta\varphi - \sin k\Delta\varphi].$$

A jobb oldal

$$\begin{aligned}\sin 2\Delta\varphi + \dots + \sin n\Delta\varphi + \sin(n+1)\Delta\varphi - \sin \Delta\varphi - \sin 2\Delta\varphi - \dots - \\ - \sin n\Delta\varphi = \sin(n+1)\Delta\varphi - \sin \Delta\varphi \approx \sin \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

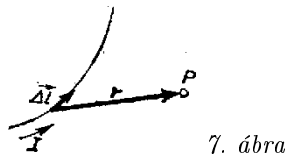
Ha  $\Delta\varphi$  elég kicsi, akkor tehát  $\sum_{k=1}^n \Delta\varphi \cdot \cos \varphi_k = 1$ , vagyis ha  $n$  elég nagy, akkor

$$L = mg R,$$

amint várható is volt az energiamegmaradás törvényéből.

A vektoriális szorzás sokszor azáltal is *megkönnyíti a törvények felírását*, hogy nem kell valamely vektor irányát külön megadni. Vegyük példaként a *Biot – Savart-törvényt*, melynek ismert alakja (ld. KML 1966. 4. szám)

$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \frac{I \cdot \Delta l \cdot \sin \varphi}{r^2}.$$



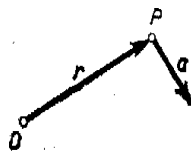
7. ábra

Ha figyelembe vesszük a térerősség irányát, láthatjuk (7. ábra), hogy a törvény ilyen alakban egyszerűbben írható

$$\Delta \vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\Delta \vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Az ebben az alakban felírt törvény nemcsak a nagyságot, de az irányt is közvetlenül megadja.

Egy másik fontos alkalmazási terület a *nyomatékok (momentumok)* vektori alakban való értelmezése és használata.



8. ábra

Általában a tér  $P$  pontjában adott a vektornak a tér  $O$  pontjára vonatkozó nyomatékán az  $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$  vektoriális szorzatot értjük, ahol  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  (8. ábra).

Az  $\mathbf{a}$  vektor különféle fizikai mennyiség lehet. Így beszélünk a sebesség, gyorsulás, erő, impulzus nyomatékáról.

Legyen például  $\mathbf{a}$  a sebesség:  $\mathbf{v}$ , ekkor

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$\mathbf{v}$ -nek az  $O$  pontra vonatkozó (9. ábra) nyomatéka.



9. ábra

A  $\Delta t$  idő alatt történt elmozdulás vektora közelítőleg  $(\Delta t) \mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{r} \times (\Delta t) \cdot \mathbf{v} = \Delta t \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

pedig nagyságra a  $\Delta t$  idő alatt sűlt terület kétszeresét adja közelítőleg (háromszög területének kétszerese). Ezért

$$\mathbf{m} = \Delta t(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) / \Delta t = \mathbf{r} \times \mathbf{v},$$

a sebesség momentumának nagysága a területi sebesség kétszerese.

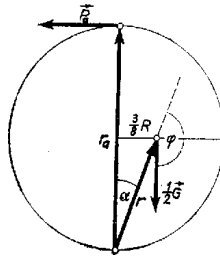
Centrális mozgásoknál, vagyis ahol az erő s ezért a gyorsulás is a mozgás centruma felé mutat, s így az erre merőleges komponens nulla (bolygók mozgása), belátható, hogy a sebesség momentumának nagysága s így a területi sebesség is állandó. Ez pedig Kepler II. törvénye, mely szerint a rádiuszvektor által egyenlő időközökben sűlt területek nagysága egyenlő.

A legfontosabb eset, ha  $\mathbf{a}$  az erővektort jelenti, mert ekkor  $|\mathbf{m}| = |\vec{P}| \cdot |\mathbf{r}| \sin \varphi$ -ben  $|\mathbf{r}| \sin \varphi$  az erő karja és így  $\mathbf{m}$  tulajdonképpen a forgatónyomatékat adja. Szükség van az irányra is, hiszen a forgatónyomatéknak iránya is van, amit a vektori alak ki is fejez.

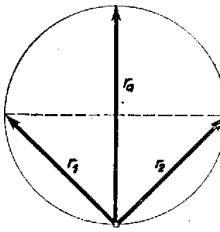
A forgatónyomaték vektori alakjával való számolás egyszerűségét mutatja a KML 582. feladatára adható következő megoldás. Legyen  $\mathbf{r}$  az alátámasztási ponttól a félgömb súlypontjához vont vektor. Ekkor a súlyerő forgatónyomatéka  $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times 1/2 \vec{G}$ . Az a) esetben a fonál feszítőerejének forgatónyomatéka az alátámasztási pontra (10. ábra)

$$\mathbf{m}_a = \mathbf{r}_a \times \vec{P}_a.$$

Mivel  $\mathbf{m}$  és  $\mathbf{m}_a$  ellentétes irányú, csak akkor lehetséges egyensúly, ha  $\mathbf{m}_a = \mathbf{m}$ .



10. ábra



11. ábra

A b) esetben  $\vec{P}_b$  vektor két pontban hat (11. ábra). Ekkor az összes forgatónyomaték

$$\mathbf{m}_b = \mathbf{r}_1 \times \vec{P}_b + \mathbf{r}_2 \times \vec{P}_b = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times \vec{P}_b = \mathbf{r}_a \times \vec{P}_b.$$

Az egyensúly feltétele most is  $\mathbf{m}_b = \mathbf{m}$ , vagyis

$$\mathbf{r}_a \times \vec{P}_a = \mathbf{r}_a \times \vec{P}_b = \mathbf{r} \times 1/2 \vec{G}.$$

Ebből következik, hogy

$$\vec{P}_a = \vec{P}_b,$$

azaz a kétfajta feszítőerő egyenlő és egyirányú. Nagysága könnyen kiszámítható, hiszen  $|\mathbf{r}_a \mathbf{r}_a \mathbf{r}_a| = 2R$  és  $\sin \varphi = \sin \alpha \frac{3/8R}{|\mathbf{r}|}$ . Így  $2R P_a = 1/2 G$ .

Az első tag a test translációs mozgási energiája:

$$E_t = 1/2 M \mathbf{v}_0^2.$$

A második tag így írható:  $\mathbf{v}_0(\vec{\omega} \times \sum_i m_i \mathbf{r}_i)$ .

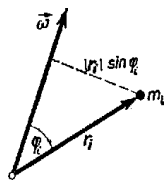
$\sum_i m_i \mathbf{r}_i$  azonban a tömegközéppont (súlypont) fogalmából kifolyólag helyettesíthető az  $M \mathbf{r}_0$  mennyiséggel, ahol  $\mathbf{r}_0$  a tömegközéppont rádiuszvektora a vonatkoztatási ponttól.<sup>1</sup> Tehát

$$E_{\text{kin}} = 1/2 M \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0(\vec{\omega} + M \mathbf{r}_0) + 1/2 \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2.$$

Ha a vonatkoztatási pont a tömegközéppont, mely mindig lehetséges, akkor  $\mathbf{r}_0 = 0$ , s így a középső tag kiesik, vagyis ez esetben  $E_{\text{kin}} = 1/2 M \mathbf{v}_0^2 + 1/2 \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2$ .

Ha a test egyik pontja fix, vagyis csak forgómozgás van, akkor ezt választjuk vonatkoztatási pontnak, s így  $\mathbf{v}_0 = 0$  miatt az első két tag eltűnik, függetlenül  $\mathbf{r}_0$  értékétől, és marad

$$E_f = 1/2 \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = 1/2 \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 \sin^2 \varphi_i.$$



13. ábra

Mivel  $\sum_i m_i r_i^2 \sin^2 \varphi_i$  az  $\vec{\omega}$  forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték (13. ábra), azért tiszta forgás esetén a mozgási energia

$$E_f = 1/2 I \omega^2.$$

Általánosan egy merev test kinetikus energiája tehát

$$E_{\text{kin}} = 1/2 M \mathbf{v}_0^2 + 1/2 I \omega^2,$$

amint közismert.

**Dózsa Márton**

<sup>1</sup>(L. Bodó Zalán cikkét: KML XXII. k. 33. lapon)