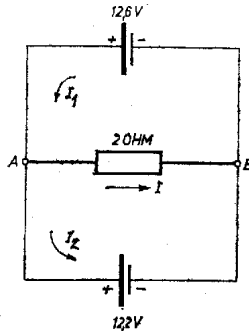


Az I. forduló feladatai

1. Két akkumulátor áll rendelkezésünkre, amelyeknek elektromotoros ereje és belső ellenállása a következő: $E_1 = 12,6$ volt, $R_1 = 0,05$ ohm, $E_2 = 12,2$ volt, $R_2 = 0,5$ ohm. Mi történik, ha a két áramforrást párhuzamosan kapcsoljuk és $R_k = 2$ ohm ellenállással zárt áramkört létesítünk?



1. ábra

Megoldás. Különböző elektromotoros erejű áramforrásokat párhuzamosan kapcsolva a nagyobb elektromotoros erejű tölti a kisebbet. AB pontok között egy bizonyos U feszültségkülönbség jön létre (1. ábra). Az első elemből kijövő I_1 áram szétoszlik a második elemet töltő I_2 áramra és a 2 ohmos ellenálláson átfolyó I áramra:

$$I_1 = I_2 + I.$$

Az első elem elektromotoros erejének és U kapocsfeszültségének különbsége a belső ellenállásra jutó feszültségesést adja:

$$12,6 \text{ V} - U = 0,05 \Omega I_1.$$

Hasonlóan a második elemnél:

$$U - 12,2 \text{ V} = 0,5 \Omega I_2.$$

Továbbá felírható Ohm törvénye a külső ellenállásra:

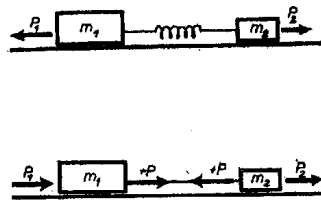
$$U = 2I \Omega = 2 \Omega (I_1 - I_2).$$

Az utolsó három egyenletből álló rendszert megoldjuk, legegyszerűbben úgy, hogy az első kettőből kifejezett I_1 -et és I_2 -t az elsőbe helyettesítjük. Az eredmény:

$$U = 12 \frac{64}{225} \text{ V} = 12,284 \text{ volt},$$

$$I_1 = 6 \frac{70}{225} \text{ A} = 6,312 \text{ amper}, \quad I_2 = \frac{38}{225} \text{ A} = 0,169 \text{ amper}.$$

2. Az ábrán látható rendszer egyenletesen gyorsulva mozog. Adatok: $m_1 = 10$ kg, $P_1 = 2$ kp, $m_2 = 2$ kg, $P_2 = 1$ kp. Mekkora erőt jelez a dinamométer a) ebben az elrendezésben? b) ha a P_1 és P_2 szerepet cserél, c) ha $m_1 = m_2 = 6$ kg? Hogyan alakul az eredmény az a) és b) esetben, ha m_2 az m_1 -hez képest elhanyagolható, pl. $m_2 = 10$ gramm? A súrlódástól eltekintünk és a dinamométer tömegét elhanyagoljuk.



2. ábra

Megoldás. Foglalkozzunk általánosságban a problémával. A tömegek közös gyorsulása, legyen a , amely akkor pozitív, ha vektornyila jobbfelé mutat. P_1 és P_2 erők mindegyike akkor legyen pozitív, ha jobbfelé mutat (2. ábra). A fonálban működő P erőt akkor nevezzük pozitívnak, ha a fonál nyújtásra van igénybe véve, vagyis rugalmas ereje befelé húzza össze a tömegeket; negatív P esetben az összekötő fonalat pálcával kell helyettesíteni.

Az egész rendszer együttes tömege $m_1 + m_2$, a rá ható teljes erő $P_1 + P_2$, tehát Newton II. törvénye szerint a létrejövő közös gyorsulás:

$$a = \frac{P_1 + P_2}{m_1 + m_2}.$$

Ez a gyorsulás adódik Newton II. törvényéből akkor is, ha külön-külön írjuk fel az egyes tömegekre:

$$\frac{P_1 + P}{m_1} = \frac{P_1 + P_2}{m_1 + m_2},$$

$$\frac{P_2 - P}{m_2} = \frac{P_1 + P_2}{m_1 + m_2}.$$

Ezen egyenletek bármelyikéből kapjuk a fonálerőre:

$$P = \frac{m_1 P_2 - m_2 P_1}{m_1 + m_2}.$$

Táblázatunk különböző adatok esetében tünteti fel a fonálerőt és a keletkező gyorsulást:

m_1	m_2	P_1	P_2	P	a
kg	kg	kp	kp	kp	
10	2	-2	+1	+7/6	-g/12
10	2	+1	-2	-11/6	-g/12
10	2	-1	+2	+11/6	+g/12
6	6	-2	+1	+1,5	-g/12
10	0	-2	+1	+1	-g/10

Közöttük feleletet találunk a feladat kérdéseire. Ha valamelyik tömeg nulla, akkor a fonálerő egyenlő lesz az ezen az oldalon működő külső erővel. A fonálerő eltűnésének feltételét is megtudjuk P képletéből: $P_1 : P_2 = m_1 : m_2$, vagyis mindegyik külső erő a maga tömegét gyorsítja; ekkor az erők csak egyirányúak lehetnek.

Ha egy merev testet több külső erő gyorsít, akkor az egész merev test gyorsulását a külső erők eredőjéből és az egész tömegből könnyen megkapjuk. Közben azonban a merev testben belső erők keletkeznek. Ezekre világít rá ez a feladat.

3. Acélgolyóra 20 °C-os petróleumban 21,45, 100 °C-os petróleumban 20 pond felhajtóerő hat. Mekkora e mérés alapján a petróleum köbös hőkiterjedési együtthatója, ha az acél lineáris hőkiterjedési együtthatója $1,2 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$?

Megoldás. Az acél köbös hőkiterjedési együtthatója $3,6 \cdot 10^{-5}$. Jelentse az acélgolyó 0 °C-on levő térfogatát V_a , akkor az acélgolyó térfogata 20°-on $V_a(1 + 3,6 \cdot 10^{-5} \cdot 20)$, 100°-on $V_a(1 + 3,6 \cdot 10^{-5} \cdot 100)$. Jelentse a petróleum 0°-os sűrűségét d , köbös hőkiterjedési együtthatóját β , akkor a petróleum sűrűsége 20°-on $d/(1 + \beta \cdot 20)$, 100°-on $d/(1 + \beta \cdot 100)$. A felhajtóerőt a golyó térfogatának és a folyadék sűrűségének (és g -nek) a szorzata adja meg;

20°-on:

$$\frac{V_a(1 + 3,6 \cdot 10^{-5} \cdot 20)dg}{1 + \beta \cdot 20} = 21,45,$$

100°-on:

$$\frac{V_a(1 + 3,6 \cdot 10^{-5} \cdot 100)dg}{1 + \beta \cdot 100} = 20.$$

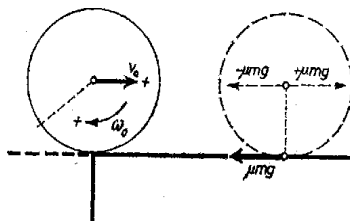
E kettő osztásával:

$$\frac{(1 + 3,6 \cdot 10^{-5} \cdot 20)(1 + \beta \cdot 100)}{(1 + 3,6 \cdot 10^{-5} \cdot 100)(1 + \beta \cdot 20)} = \frac{21,45}{20}.$$

Minden ismeretlen adat kiesett, ez elsőfokú egyenlet β számára. A megoldás: $\beta = 0,963 \cdot 10^{-3} 1/^\circ\text{C}$.

A II. forduló feladatai

1. r sugarú, m tömegű abroncsot függőleges síkban, a talaj fölött, középpontja körül ω_0 szögsebességgel „visszafelé” megforgatva úgy dobunk el, hogy középpontjának sebessége az eldobás irányában v_0 . Mekkora ω_0 -val érhető el, hogy az abroncs talajtérés utáni mozgása során visszaforduljon (visszafelé haladjon)? Mekkora ω_0 esetén lesz a visszafelé haladó abroncs sebessége v_0 ?



3. ábra

Megoldás. Kezdetben, a felülethez való hozzáérés előtt az abroncs középpontjának vízszintes sebessége v_0 , jobbra számítva pozitív előjellel (3. ábra) és az abroncs forgásának szögsebessége ω_0 , pozitívnak számítva, ha iránya egyezik az óramutató járásával; a kerületi pont sebessége a középponthoz viszonyítva $\omega_0 r$. v_0 és ω_0 egymástól függetlenül, tetszés szerint megadható adatok.

Először legyenek olyanok a kezdeti adatok, hogy $\omega_0 r < v_0$. A felülethez való hozzáérés pillanatától kezdve a felület mentén nagyobb a középpont jobbra tartó sebessége, mint a lent érintkező kerületi pont középponthoz viszonyított balra irányuló sebessége, ezért nincs sima legördülés, a kerék köszörül. A kerületi pont mentén fellépő súrlódási erő μmg és balra mutat. Hozzáveszünk a középpontban $\pm \mu mg$ erőket. $-\mu mg$ erő lassítja a középpont mozgását, a lassító gyorsulás μg . Ennek hatása alatt a középpont egyenletesen lassuló mozgást végez, amelynél $v_c = v_0 - \mu g t$. A $+\mu mg$ erő és az eredeti μmg súrlódási erő μmgr forgatónyomatékokat jelent, amely gyorsítja a középpont körüli forgást. A forgás szöggyorsulása $\beta = \text{forg. nyom.: tehetetl. ny.} = \mu mgr / mr^2 = \mu g / r$. Tehát a szögsebesség mint az idő függvénye: $\omega = \omega_0 + \mu g t / r$. Ha a kerületi pontnak a középponthoz viszonyított sebességét kérdezzük, ez $v_k = \omega r = \omega_0 r + \mu g t$. Ezek szerint a középpont μg gyorsulással lassabbodva, a kerületi pont μg gyorsulással gyorsabbodva mozog. A forgó mozgás fékezi a haladást, a haladó mozgás gyorsítja a forgó mozgást. Ez a folyamat addig tart, amíg v_c és v_k egyenlővé nem lesz. Ekkor ér véget a mozgás változása, innentől kezdve sima legördülés áll be, a középpont sebessége valamilyen v_r érték, és a szögsebesség $\omega_r = v_r / r$. Tegyük egyenlővé v_c -t és v_k -t:

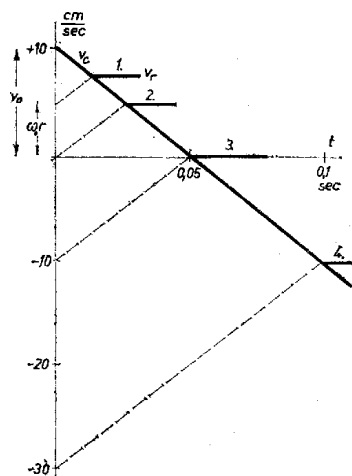
$$v_0 - \mu g t = \omega_0 r + \mu g t.$$

Innen a lassítás időtartama $t = \frac{v_0 - \omega_0 r}{2\mu g}$.

Ezt az időt akár v_c , akár v_k képletébe helyettesítve megkapjuk a középpont végső sebességét, amellyel a lassítási folyamat végén továbbgurul:

$$(1) \quad v_r = \frac{v_0 + \omega_0 r}{2}.$$

Látható, hogy ez a végsebesség a középpont és kerületi pont kezdeti sebességének a számtani középértéke. μ , a súrlódási együttható számértéke e tekintetben lényegtelen.



4. ábra

4. ábránk grafikusán mutatja meg a középpont mozgásának fékeződését és a forgás felgyorsulását, ha $v_0 = 10$ cm/s, $r = 5$ cm, $\mu = 0,2$, $g = 1000$ cm/s². A középpont v_c sebességének grafikonja +10-ből kiinduló, süllyedő egyenes (vastag vonal). Az 1. szaggatott vonal a forgás kerületi sebességének a növekedését mutatja, ha kezdetben $\omega_0 = 1$, $\omega_0 r = 5$ cm/s; a végső sebesség közösen 7,5 cm/s lesz. Ha forgás nélkül dobjuk oda az abroncsot $\omega_0 r = 0$ (2. vonal), akkor a végsebesség 5 cm/s. Ha ellentétes forgásiránnyal, $\omega_0 r = -10$ cm/s-mal dobjuk oda az abroncsot, akkor a végsebesség nulla, az abroncs állva marad (3. vonal); ez a felelet a feladat első kérdésére. Ennél gyorsabb ellentétes kezdeti forgásnál a középértékként keletkező végső sebesség negatív, vagyis az abroncs visszafelé gurul, például $\omega_0 r = -30$ cm/s-nál a végső sebesség -10 cm/s (4. vonal); ez a válasz a feladat második kérdésére.

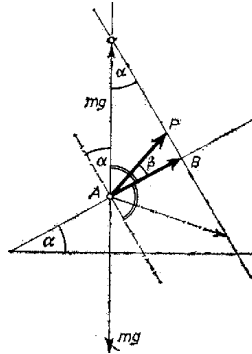
(1) képletünkéből, a kezdeti v_0 -ból és ω_0 -ból kiszámítható a végső sebesség. (1) megoldása ω_0 -ra:

$$\omega_0 = \frac{2v_r - v_0}{r}.$$

A feladat első kérdésében a határesetben $v_r = 0$, ezért $\omega_0 = -v_0/r$. Ennél nagyobb abszolút értékű, visszafelé forgó kezdeti szögsebesség szükséges ahhoz, hogy az abroncs megállás után elindulhasson visszafelé. A második kérdésben $v_r = -v_0$, tehát $\omega_0 = -3v_0/r$.

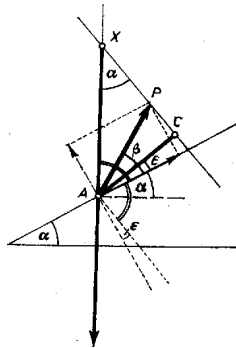
Ha a kezdeti feltétel olyan, hogy $\omega_0 r > v_0$, akkor a forgás gyorsítja fel a középpont haladását és a középpont haladási sebessége fékezi a forgást. A végsebességre most is (1) érvényes. Ha $\omega_0 r = v_0$, akkor semmi sem történik, az abroncs mozgásának megváltozása nélkül gurul tovább a felületen.

2. α hajlásszögű lejtőn a lejtő síkjával β szöget bezáró erővel, egyenletes mozgással húzunk fel egy testet. A test és a lejtő között a súrlódási együttható μ . Milyen határok között változhat a β szög, hogy a testet fel lehessen húzni a lejtőről?



5. ábra

Megoldás. Először tekintsük a súrlódás nélküli lejtőt (5. ábra). Az A pontban levő testnek a lejtőn egyensúlyban tartásához valamilyen P erő kell, amelynek nagysága abból következik, hogy lejtő menti vetületének $mg \sin \alpha$ -nak kell lennie, $AB = mg \sin \alpha$. Ha P erő a lejtőhöz képest β szöget zár be, akkor is AB -nek kell lennie a lejtő menti vetületének. Ebből azonnal következik, hogy az mg súly felhúzásához alkalmas erők végpontjainak mértani helye B -ben a lejtőre húzott merőleges. Ez a mértani hely az A -ban emelt függőleget X -ben metszi és azonnal látszik, hogy $AX = AB / \sin \alpha = mg$. Ennél balrább nem kerülhet a P erő végpontja, mert akkor leemelné a tárgyat a lejtőről. Eszerint a súrlódás nélküli esetben β szög számára lehetséges a pozitív irányban 0° -tól $90^\circ - \alpha$ -ig, negatív irányban a 0 -tól -90° -ig terjedő szögtartomány.



6. ábra

Most lássuk a súrlódásos esetet (6. ábra). P erő lejtőre merőleges összetevője $P \sin \beta$, ezért a tárgyat $mg \cos \alpha - P \sin \beta$ erő nyomja a lejtőhöz és így a súrlódási erő $\mu(mg \cos \alpha - P \sin \beta)$. P erő $P \cos \beta$ lejtő menti összetevőjének az $mg \sin \alpha$ súlyösszetevőt és a súrlódási erőt kell egyensúlyoznia, ha a terhet egyenletesen fel akarjuk húzni:

$$P \cos \beta = mg \sin \alpha + \mu(mg \cos \alpha - P \sin \beta).$$

Ebből kiszámítva az egyensúlyhoz szükséges erőt:

$$P = mg \cdot \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta}.$$

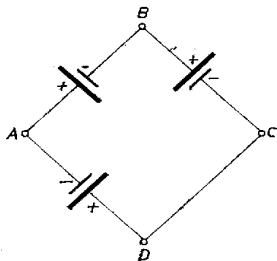
Szépen alakítható át ez az eredmény, ha figyelembe vesszük, hogy ε súrlódási határszög tangense a súrlódási együttható: $\mu = \tan \varepsilon$. Ezt behelyettesítve és a törtet $\cos \varepsilon$ -nal bővítve, goniometriaival azonosságokkal átalakítva:

$$(2) \quad P = mg \cdot \frac{\sin(\alpha + \varepsilon)}{\cos(\beta - \varepsilon)}.$$

Keressük ismét az egyensúlyozáshoz alkalmas P erők végpontjainak mértani helyét. P erő akkor a legkisebb, ha nevezője a legnagyobb, vagyis 1; ez akkor következik be, ha $\beta - \varepsilon = 0$, vagyis $\beta = \varepsilon$. β szög csak a nevezőben szerepel. Tehát akkor van a legkisebb húzóerőre szükség, ha a kötélt akkora pozitív szöget alkot a lejtővel, amennyi a súrlódási határszög. Ez az erő a 6. ábrán AC , nagysága $mg \sin(\alpha + \varepsilon)$. (2) képletünk szerint a tetszőleges irányú AP erőt a

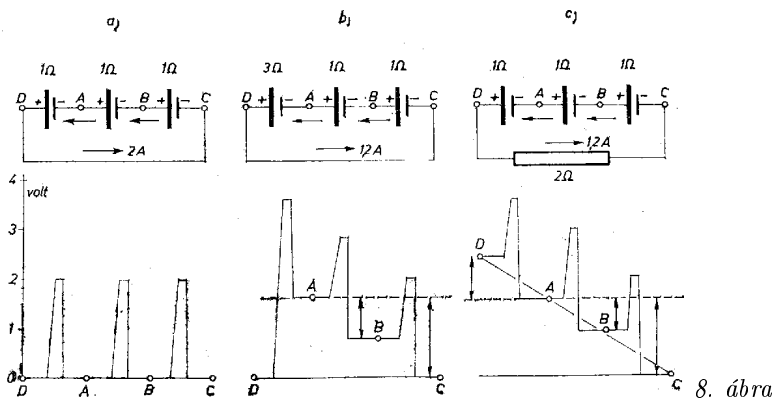
maximális erőből úgy kapjuk, hogy elosztjuk $\cos(\beta - \varepsilon)$ -nal. Ez azt jelenti, hogy $ACX \triangleleft$ derékszög és a keresett mértani hely az AC -re C -ben emelt merőleges. Ennek ismerete igen megkönnyíti az áttekintést.

Az AX távolságot úgy kapjuk meg, hogy $AC = mg \sin(\alpha + \varepsilon)$ befogót elosztjuk $AXC \triangleleft$ sinusával. Ez a szög $\alpha + \varepsilon$. Tehát az AX távolság súrlódásos esetben is mg súllyal egyenlő, mint a súrlódás nélküli esetben. Tehát a β szög számára megengedett szögtartomány a pozitív irányban most is $90^\circ - \alpha$ -ig terjed, különben P erő leemelné a tárgyat a lejtőről. Negatív irányban β most 0° -tól $90^\circ - \varepsilon$ -ig terjedhet. A negatív irányban 90° és $90^\circ - \varepsilon$ közötti szögtartományban hiába alkalmazunk akármilyen nagy erőt; amelynek még volna lejtő irányú összetevője, mert ez az erő annyira odaszorítja a tárgyat a lejtőhöz, hogy a megnövekedett súrlódási erő teszi lehetetlenné a felhúzást. A lejtő önzáró, mint a fába behajtott facsavar vagy a lemezeket összetartó anyáscsavar.



7. ábra

3. Három 2 volt elektromotoros erejű és 1 ohm belső ellenállású elemet a 7. ábra szerint kapcsolunk. Mekkora az egyes csúcspontok feszültsége az A ponthoz képest a) az ábra szerinti kapcsolás esetén? b) ha az $A - D$ ágba levő elem belső ellenállása 3 ohmra növekszik? c) ha a $C - D$ ágba 2 ohmos ellenállást kapcsolunk? d) ha a B és D pontok közé 0,5 ohmos ellenállást kapcsolunk? e) ha a B és D pontokat rövidre zárjuk?



8. ábra

Megoldás. A galvánelemek tulajdonsága, hogy a rajtuk átmenő áram irányában haladva a lemezek közötti feszültségkülönbség annyit ugrik, amennyi az elem elektromotoros ereje, emellett annyit esik, mint az elem belső ellenállásának és az áramerősségnek a szorzata. E két feszültségváltozás algebrai összege mérhető a lemezek között. 8. ábránk egy sorban egymás mellé rajzolva mutatja az elemeket. a) esetben az összes elektromotoros erő $3 \cdot 2 = 6$ volt, az összes ellenállás $3 \cdot 1 = 3$ ohm, tehát az áramerősség $6 : 3 = 2$ amper. Induljunk el C -ből. Az első elem 2 voltot emelné a feszültségkülönbséget elektromotoros ereje folytán, de belső ellenállásán $2 \cdot 1 = 2$ voltot esik is, tehát a lemezek között nem észlelünk feszültségkülönbséget. Ugyanígy van ez a másik két elemnél is. A, B, C, D pontok egyező feszültségen vannak, bármely két pont között mérve a feszültségkülönbség 0.

b) esetben az összes elektromotoros erő $3 \cdot 2 = 6$ volt, az összes ellenállás $3 + 1 + 1 = 5$ ohm, tehát az áramerősség $6 : 5 = 1,2$ amper. C -ből B -be haladva az emelkedés 2 volt, a süllyedés $1 \cdot 1,2 = 1,2$ volt, tehát B 0,8 voltal pozitívabb, mint C . Pontosan ez történik B -ből A -ba haladva. A -tól D felé haladva az emelkedés 2 volt, az esés $3 \cdot 1,2 = 3,6$ volt, végeredményben D pont 1,6 voltal negatívabb, mint A . A feladat szerint a feszültségeket A ponthoz kell viszonyítani, tehát B 0,8 voltal, C és D 1,6 voltal negatívabb, mint A .

A c) kérdésben ugyanazok az elemek szerepelnek, mint a)-ban, de a telep nincs rövidre zárva, hanem véges ellenálláson van. Az összes elektromotoros erő most is 6 volt, az összes ellenállás $3 \cdot 1 + 2 = 5$ ohm és az áramerősség ismét $6 : 5 = 1,2$ amper. C -től B -ig 2 volt emelkedéshez $1 \cdot 1,2 = 1,2$ volt esés tartozik, tehát B 0,8 voltal pozitívabb, mint C . Ugyanez van B és A , valamint A és D között, D és C között a külső 2 ohmos ellenálláson átfolyó 1,2 amper $2 \cdot 1,2 = 2,4$ voltos feszültségesést jelent, amivel visszaértünk C feszültségéhez. A -hoz viszonyítva D 0,8 voltal pozitívabb, B 0,8 voltal és C 1,6 voltal negatívabb.

A d) és e) kérdésekben feltehetően az a) kérdés összeállításából kell kiindulni. Ebben az esetben B és D között nincs feszültségkülönbség, tehát középük bármit kapcsolva ezen nem megy át áram és minden feszültség egyenlő marad, mint a) esetben.