

**1. Kérdés:** A nyáron felvételiztem az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. A következő feladatot kaptam. Egy 2 kg-os deszkalapon egy 1 kg-os deszkalap fekszik. Legfeljebb mekkora  $P$  erővel gyorsíthatom a 2 kg-os tömegű deszkát, hogy az 1 kg-os ne mozduljon el rajta, ha a nyugalmi súrlódási együttható a két test között, továbbá a súrlódási együttható a deszka és az asztal között 0,2?

A feladatot nem tudtam megoldani. Majdnem mindenkinek rossz lett a megoldása, kivéve egy fiút, aki „tehetetlenségi erők”-ről beszélt, melyek „mozgó koordináta-rendszerekben” fellépnek. Szükségesek-e e fogalmak, vagy a feladat megoldható a középiskolai tananyaggal is?

(Horváth Lajos)

**Felelet.** Nagy örömmel válaszolok a kérdésre, mivel több év óta felvételiztetek, és sok olyan választ kapok, amelyből kiderül, hogy Newton II. törvénye csupán „ $P = ma$ ”, három betű, amely nagyon keveset mond a diákoknak. A továbbiakban szeretnék rámutatni arra, hogy bizonyos feladatok megoldására a törvényt hogyan célszerű alkalmazni.

Feladatmegoldás szempontjából az  $a = P/m$  alakot tudják könnyebben alkalmazni. Ez kimondja, hogy egy anyagi pont gyorsulása egyenlő a rá ható összes erők eredőjének és az anyagi pont tömegének a hányadosával. Arra a kérdéssemre, hogy miért van nyugalomban az asztalon levő hamutartó, amikor rá  $mg$  nagyságú erő hat, sok érdekes választ kaptam már. Például: a súlyerő nem számít a gyorsító erők közé, a súrlódási erő nem engedi a hamutartót mozogni stb. Mégis az ilyen kérdéseket sok diák meg tudja magyarázni, mondván, hogy a testre ható erők eredőjét kell venni, márpedig a hamutartóra súlyán kívül hat még az asztal által kifejtett ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erő is, és így a két erő eredője 0.

Nehezen megy a törvénynek olyan alkalmazása, amikor az a feltétel, hogy egy  $m$  tömegű testnek  $a$  gyorsulással kell mozognia, és ebből kell az erőt meghatározni. A II. törvény szerint ahhoz, hogy egy  $m$  tömegű test  $a$  gyorsulással mozogjon,  $P = ma$  erőnek kell hatnia.

Vegyük a következő feladatot.

Az asztalon van egy 1 kg-os test, amely súrlódás nélkül mozoghat. Mekkora erővel kell húznom, hogy  $5 \text{ m/sec}^2$  vízszintes irányú gyorsulással mozogjon?

A törvény szerint  $P = ma = 1 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m/sec}^2 = 5 \text{ Newton}$  vízszintes irányú erővel kell a testre hatni és ezt az erőt valamilyen testnek ki is kell fejtenie. Ha egy olyan cérnaszálat kötök a testre, amely már 2 Newton erő hatására elszakad, akkor ezzel a cérnaszállal csak  $a = P/m = 2 \text{ m/sec}^2$  maximális gyorsulással tudom mozgatni a testet. Nagyobb erő esetén elszakad a cérna.

Térjünk most vissza az eredetileg kitűzött feladathoz. A 2 kg-os  $m_2$  tömeget  $a$  gyorsulással akarom gyorsítani. Ahhoz, hogy az 1 kg-os  $m_1$  tömegű test ne mozogjon rajta, kell, hogy az is  $a$  gyorsulással mozogjon. Ehhez pedig  $P_1 = m_1 a$  erőre van szükség. Milyen erő fogja fedezni ezt a gyorsítási erőt? Az  $m_1$  tömegre ható  $m_1 g$  súlya és az  $m_2$  deszka által gyakorolt ellenerő eredője 0. Hat azonban  $m_1$  és  $m_2$  között súrlódási erő is. E nyugalmi súrlódási erő maximális nagysága  $P_s = \mu P_{ny}$ , ahol  $\mu$  a nyugalmi súrlódási együttható,  $P_{ny}$  pedig a felületre merőleges nyomóerő. Tehát feladatunkban maximálisan ( $g$  értékét kerekítve)  $P_s \approx 0,2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/sec}^2 = 2 \text{ N}$  erő léphet fel a két test között. Ha a maximális erő, amely  $m_1$ -re hathat, 2 N, akkor a maximális gyorsulás, amellyel mozoghat,  $a = P/m = 2 \text{ N} / 1 \text{ kg} = 2 \text{ m/sec}^2$ .

Tehát  $m_2$ -t is maximálisan  $2 \text{ m/sec}^2$  gyorsulással mozgathatom. A kérdéses  $P$  erővel szemben fellép azonban az  $(m_1 + m_2) g$   $\mu_1$  súrlódási erő is, így

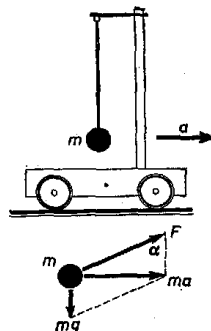
$$P - (m_1 + m_2) g \mu_1 = (m_1 + m_2) a,$$

amiből

$$P = (m_1 + m_2)(a + g \mu_1),$$

$$P = 3 \text{ kg} \cdot (2 + 0,2 \cdot 10) \text{ m/sec}^2 = 12 \text{ N}.$$

Elemezzük még a következő feladatot.



Az ábrán látható kiskocsi vízszintes irányban a gyorsulással mozog. Milyen irányban áll a kiskocsin levő  $m$  tömegű testet tartó fonal?

Ahhoz, hogy a kiskocsin levő  $m$  tömegű test a kiskocsival együtt vízszintes irányban  $a$  gyorsulással mozogjon, kell, hogy ugyanilyen irányú  $P = ma$  erő legyen az  $m$  tömegre ható erők eredője. Az  $m$  tömegre csak a súlya,  $mg$  és a fonál  $F$  feszítőereje hat. Kell tehát, hogy  $ma$  e két erő eredője legyen. Az erők vektoriális összeadásából nyerjük, hogy  $F = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2}$ . Az erőnek a függőlegessel bezárt  $\alpha$  szögére igaz:  $\tan \alpha = ma/mg$ , azaz  $\tan \alpha = a/g$ .

Az  $F$  erőt a fonál szolgáltatja, így a fonálnak is ebben az irányban kell állnia. Látható, hogy ha  $a = 0$ , tehát a kiskocsi áll vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, akkor a fonál függőlegesen lóg, mivel  $\alpha = 0$ .

E két feladatban tehát nincs szükség „tehetetlenségi erők” vagy „mozgó koordinátarendszerek” bevezetésére. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ezek segítségével sok esetben könnyebbé válik a feladat megoldása, de minden feladat megoldható nélkülük is.

1.  $30^\circ$ -os lejtőn  $2 \text{ m/sec}^2$  gyorsulással felfelé gyorsul egy kiskocsi. Mekkora és milyen irányú erővel kell tartani a kiskocsin levő  $1 \text{ kg}$ -os tömeget, hogy a kiskocsival együtt mozogjon, ha a tömeg és a kocsi között nincs súrlódás?

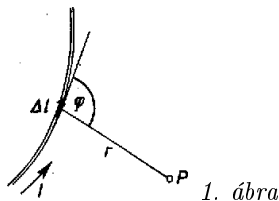
2. Mekkora erő feszíti azt a kötelet, mellyel  $10 \text{ kg}$  tömegű vödört  $3 \text{ m/sec}^2$  gyorsulással függőlegesen felfelé gyorsítunk, ha a kötél tömegét elhanyagoljuk?

**Póór István**

**2. Kérdés.** *Feladatokban gyakran számítjuk vezetők mágneses terét. Mit kell tudnunk Biot és Savart erre vonatkozó törvényéről?*

(Kislaki Zoltán)

**Felelet.** *Oersted* dán fizikus észlelte először 1820-ban, hogy vékony platinadróton átfutó áram kitéríti a mágnesűt. Még ugyanebben az évben *Ampère* állapította meg azt a törvényszerűséget, amely kapcsolatba hozza a mágnesűt kitérését az áram irányával. Az áram erőssége és a mágneses térerősség közötti összefüggésre ugyanebben az időben talált rá a két francia fizikus, *Biot* és *Savart*. Törvényüket a ma használatos formában *Laplace* írta fel először.



1. ábra

A Biot–Savart törvény elsősorban igen vékony vezetőkre vonatkozik, amelyekben állandó ( $I$ ) erősségű (stacionárius) áram folyik. Azt mondja ki, hogy ha a vezetőknek egy igen kicsi (egyenesdarabnak tekinthető)  $\Delta l$  szakaszát tekintjük, akkor az  $I$  áram által keltett mágneses térerősség nagysága a  $P$  pontban

$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \frac{I \cdot \Delta l \cdot \sin \varphi}{r^2},$$

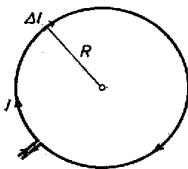
ahol  $r$  az elemi vezetőhossz távolsága a  $P$ -től,  $\varphi$  pedig a szög, amelyet az áram iránya  $r$ -rel zár be. A tér irányát az ismert jobbkez-szabály adja meg és a tér-erősség értékét A/m-ben kapjuk, ha az áramerősséget amperben, a távolságot méterben adjuk meg.

Első látásra feltűnik a hasonlóság a Newton-féle gravitációs törvénnyel, vagy a Coulomb-féle törvényekkel. Jellegzetesen távolhatási törvény, mint ezek, szemben az elektromágneses térre vonatkozó Maxwell-féle törvényekkel, vagy a gravitáció esetén az általános relativitáselmélettel. De amint az utóbbi tartalmazza a Newton-féle törvényt, vagy a Maxwell-elmélet a Coulomb-törvényt, ugyanúgy a Maxwell-féle térelméletből bizonyos feltételek mellett kiadódik a Biot–Savart törvény is.

Jelentősége annyiban nagy, hogy segítségével bármilyen alakú vékony vezetőben folyó áram mágneses térerőssége meghatározható. Az egyes áramelemek által keltett térerősségeket kell vektorilag összegezni a paralelogramma-tétel szerint. Természetesen ez csak igen egyszerű vezetők esetén lehetséges így. Integrálszámítás segítségével azonban elvileg minden vezetőre elvégezhető a számítás.

Nézzünk néhány egyszerű példát, ahol a számítás nem ütközik nehézségbe.

1. *Kör alakú vezetőben folyó állandó erősségű áram mágneses tere a kör középpontjában.*



2. ábra

Az elemi hosszúságú áramdarab mágneses térerőssége:

$$\Delta H = \frac{1}{2\pi} \frac{I \cdot \Delta l}{R^2},$$

mivel  $\varphi = 90^\circ$ . A tér nyilván merőleges a rajz síkjára és befelé mutat. Mivel a kör mentén minden  $\Delta l$  hosszra ugyanaz a térerősség nagyság és irány szerint, azért az eredő

$$H = \frac{I}{4\pi R^2} \sum \Delta l.$$

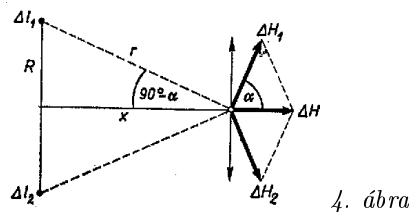
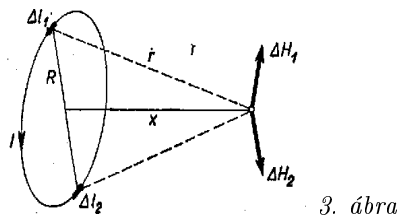
De

$$\sum \Delta l = 2R\pi, \quad \text{szóval} \quad H = \frac{I}{2R}.$$

Ha nem egy menet fut, hanem  $N$  egymás mellett oly szorosan, hogy vékony csövet képeznek, akkor

$$H = \frac{IN}{2R}.$$

2. Hasonlóképpen elvégezhető a számítás a körvezető síkjára merőleges, a középpontra állított egyenes mentén  $x$  távolságra.



A kör kerületének  $\Delta l_1$  szakaszára fennáll:

$$\Delta H_1 = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\Delta l_1}{r^2} = \frac{I \cdot \Delta l_1}{4\pi(R^2 + x^2)},$$

mert  $\varphi = 90^\circ$ . A tér iránya pedig merőleges  $r$ -re és a rajzban felfelé mutat. Vegyük most az ugyanazon átmérő másik végén fekvő  $\Delta l_2$  szakaszt. A térerősség nagysága megegyezik az előbbiével, de iránya lefelé mutat, vagyis a két vektor  $x$ -re merőleges komponensei kiegyenlítik egymást, míg az  $x$  irányába esők összeadódnak.

A két elemi áramszakasz által keltett térerősség tehát

$$\Delta H' = 2 \cdot \Delta H_1 \cos \alpha = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\Delta l_1}{R^2 + x^2} \cos \alpha.$$

De  $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}},$

szóval

$$\Delta H' = \frac{IR}{2\pi} \frac{\Delta l_1}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

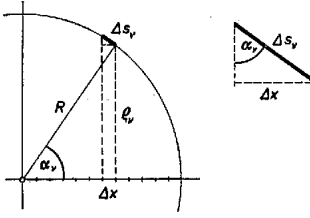
Ha most a  $\Delta l_1$ -eket összegezzük a félkörre és a vesszős jelölést elhagyjuk, nyerjük:

$$H = \frac{1}{2} \frac{I \cdot R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Ezt a képletet kell használni a szolenoid mágneses terének kiszámításához, amely azonban csak az integrálszámítás alkalmazásával végezhető el.

3. Felsőbb analízis nélkül eredményt lehet elérni az **570. feladat** esetén is. A számítás menete a következő.

Először csak a félgömbre tekercselt  $N$  menet esetében végezzük el. Tekintsük a menetek síkjára merőleges főkör-metszetet, amely  $R$  sugarú félkör. Osszuk fel az  $R$ -et  $n$  számú (kicsiny)  $\Delta x$  hosszúságú egyenlő részre. A  $\nu$ -edik szakaszhoz tartozék a  $\Delta S$  hosszúságú egyenesnek vehető körív.



5. ábra

Mivel a negyedkörön egységnyi távolságra

$$\frac{N}{R\pi/2} = \frac{2N}{R\pi}$$

menet esik, a  $\Delta S_\nu$ -n  $\frac{2N}{R\pi} \Delta S_\nu$  menet található. De nyilván

$$\Delta S_\nu \approx \frac{\Delta x}{\sin \alpha_\nu} = \frac{R}{\rho_\nu} \Delta x$$

(ekkor *relative* kis hibát követünk el, ha  $n$  elég nagy) s így a  $\Delta x = \frac{R}{n}$  vastagságú gömbrétegben a menetek száma  $\frac{2N}{\pi} \cdot \frac{x}{\rho_\nu}$ . Ezért az ezek által keltett térerősség a középpontban közelítőleg

$$\Delta H_\nu \approx \frac{I}{2} \frac{\rho_\nu^2}{[\rho_\nu^2 + (\nu \Delta x^2)^{3/2}} \cdot \frac{2N}{\pi} \frac{\Delta x}{\rho_\nu} = \frac{I \cdot N}{R^3 \pi} \rho_\nu \cdot \Delta x,$$

mert

$$\rho_\nu^2 = R^2 - (\nu \Delta x)^2.$$

Tehát

$$H \approx \frac{IN}{R^3 \pi} \sum_{\nu=1}^n \rho_\nu \Delta x.$$

Minthogy azonban  $\rho_\nu \Delta x$  a  $\rho_\nu$  magasságú  $\Delta x$  alapú téglalap területe, azért az összegezés  $\nu$  szerint a  $\Delta x$  alaphosszú téglalapok összterületét adja, amely ha  $N$  elég nagy és a nála kisebb  $n$  is elég nagy, jól megközelíti a negyedkör lap területét, tehát

$$H \approx \frac{I \cdot N}{4R}.$$

Ez az eredmény egyezik azzal, amelyet az analízis módszere nyújt. Sőt, számításunk menete pontosan fedi az analízis módszerét. Ha az egész gömböt tekercseljük körül, akkor a középpontban nyilván kétszer akkora lesz a térerősség nagysága.

**Dózsa Márton**