

¹Ennek bizonyítása volt az 1961. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny II. fordulójának 1. feladata, lásd a megoldást K.M.L. 24. (1962) 1–2. o.

Ennek alapján a szerkesztés a következő. Az adott kör O középpontján át tetszés szerint felvett AB átmérő B végpontjában meghúzzuk az érintőt, felmérjük rá a $BH = BO = 1/2$ szakaszt, ekkor $AH = \sqrt{5}/2$. Az AH szakaszt metsszük a H körül HB sugárral írt körrel J -ben, ekkor $AJ = x$. Végül az A és B körül AJ sugárral írt körívvel az adott körből kimetszük a D , illetőleg C csücsöt.

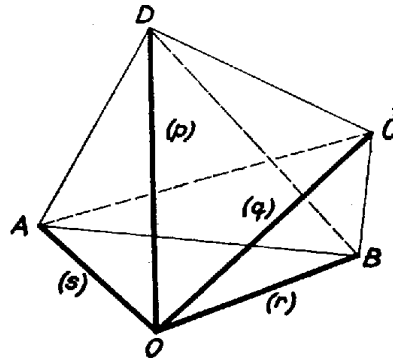
Így a csücsök a körön vannak, másrészt teljesül (1) is, ezért a trapézba érintő kör írható, tehát megfelel a követelményeknek.

Megjegyzés. A fenti szerkesztést felére kicsinyítve végezhetjük el, a kör AB -re merőleges sugarai egyike, OK fölé kört írva. Ennek középpontját L -lel, AL -lel való metszéspontjait M -mel és N -nel jelölve ($AM < AN$) $AM = AJ/2$, ennek alapján az AO átmérőjű Thalész körből kimetszhetjük az AD oldal E felezőpontját.

Az N metszéspont alapján viszont a szárak P metszéspontját jelölhetjük ki a trapéz szimmetriatengelyén. Ugyanis OE , mint az OAD egyenlő szárú háromszög magassága, merőleges AP -re, így a PAO derékszögű háromszögből

$$AP = \frac{AO^2}{AE} = \frac{1}{4 \cdot AE} = \frac{1}{4 \cdot AM} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} = AL + LN = AN.$$

3. feladat. Négy adott szakasz kezdőpontja közös. A szakaszok milyen (egy síkban való) elhelyezése esetén lesz a végpontjaikkal, mint csücsökkel meghatározott négyszög területe a legnagyobb?



I. megoldás. Legyen az adott szakaszok közös kezdőpontja O , végpontjaik egy bizonyos helyzetben A, B, C, D , a betűzést úgy választva, hogy $ABCD$ ne hurkolt négyszöget adjon. Ennek területe, mint ismeretes (2. ábra)

$$(2) \quad t = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \varphi,$$

ahol φ az AC és BD átlók által bezárt szög.

A szakaszok kölcsönös helyzetét változtatva mindig fennáll

$$AC \leq AO + OC, \quad BD \leq BO + OD, \quad (0 \leq \sin \varphi \leq 1,$$

tehát

$$t \leq \frac{1}{2}(AO + OC)(BO + OD).$$

Itt az egyenlőség teljesül, (2) tényezői (egymástól függetlenül) elérik legnagyobb értéküket, ha az OA és OC , valamint OB és OD szakaszok egymás meghosszabbításába esnek – más szóval, ha O az AC és BD átlók metszéspontjává válik –, és ha még $\varphi = 90^\circ$, vagyis az átlók merőlegesek egymásra. Ekkor t legnagyobb értéke csak a szakaszok hosszától és azok két párba rendezésétől függ.

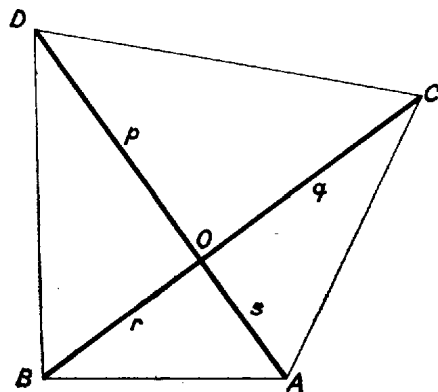
A 4 szakasz 2 párba állítása háromféleképpen lehetséges, mert az elsőnek kiválasztott szakasz meghosszabbításába a további 3 bármelyikét állíthatjuk, és ezután mindig a maradék 2 szakasz alkotja a másik párt. Legyen a 4 szakasz hossza p, q, r, s úgy, hogy $p \geq q \geq r \geq s (> 0)$, így a kétszeres terület legnagyobb értéke a következő 3 szorzat valamelyike:

$$2t_1 = (p + q)(r + s), \quad 2t_2 = (p + r)(q + s), \quad 2t_3 = (p + s)(q + r).$$

A harmadikból az első, majd a másodikat kivonva a különbség így alakítható:

$$2(t_3 - t_1) = (p - r)(q - s), \quad 2(t_3 - t_2) = (p - q)(r - s).$$

Ezek egyike sem negatív, tehát $t_3 \geq t_1$, $t_3 \geq t_2$, így p -nek s -sel – vagyis a leghosszabb szakasznak a legrövidebbel – egy átlóba állítása esetén kapunk legnagyobb területű négyszöget (3. ábra).



3. ábra

II. megoldás. A fentebbi jelölésekkel az OAB , OBC , OCD és ODA háromszög területe külön-külön akkor a legnagyobb, ha O -ból kiinduló két oldaluk merőleges egymásra. Ez a 4 feltétel egyidejűen teljesíthető úgy, hogy a négy háromszög O -nál levő derékszögeivel kitöltjük az O pont körüli 360° -os szögtartományt, és ekkor az $ABCD$ négyszög területe is a legnagyobb, egyenlő a négy derékszögű háromszög területének összegével. Ebben az elhelyezésben 2–2 szakasz egymás meghosszabbításába esik, és az $ABCD$ négyszög egy-egy átlóját alkotja.

A szakaszok fenti 3 párosításából akkor kapunk legnagyobb területet, ha az egyik átló a legkisebb és a legnagyobb szakasz összege. Ismeretes ugyanis, hogy két egyenlő kerületű téglalap közül annak nagyobb a területe, amelyikben az oldalak különbsége (abszolút értékben) kisebb. Más szóval, ha két (két-tényezős) szorzatban a tényezők összege ugyanakkora, akkor az a szorzat nagyobb, amelyikben a tényezők kevesebbel térnek el egymástól. Esetünkben a két tényező a 4 adott szakaszból alkotott két páros összeg, és ezek eltérése akkor a legkisebb, ha a legkisebb szakaszt a legnagyobbikkal állítjuk párba.

Scharnitzky Viktor