

Kezdők versenye (az általános verseny és a speciális matematikai
osztályok versenye)

Az általános és a matematikai osztályok első feladata csak az egyenletrendszer állandóiban különbözött, ezért együtt fogjuk ezeket tárgyalni.

1. feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} (*) \quad \frac{xy}{x+y} &= \frac{1}{a}, & \frac{yz}{y+z} &= \frac{1}{b}, & \frac{zu}{z+u} - \frac{1}{c} &= 0, \\ & & \frac{xyzu}{x+y+z+u} &= \frac{1}{d}, \end{aligned}$$

ahol $a = 1, b = 2, c = -1, d = 1$ (általános verseny),

ill. $a = 1, b = 3, c = -2, d = 1$ (matematikai osztályok versenye).

Megoldás. Az utolsó egyenletnek csak olyan megoldása lehet, amelyikben egyik ismeretlen sem 0, így létezik a reciprokuk. A harmadik egyenletben az állandót a jobb oldalra véve, majd az első három egyenlet reciprokát véve, elsőfokú egyenletrendszert kapunk az ismeretlenek reciprokaira:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = c.$$

Innen bármely három ismeretlen kifejezhető a negyedikkel és a negyedik egyenletbe helyettesítve egyismeretlenes egyenletet kapunk. Célszerű lesz azonban először annak is a reciprokát venni és x -et és y -t, valamint z -t és u -t együtt tartva az első és a harmadik egyenlet felhasználásával átalakítani az egyenletet:

$$\frac{x+y+z+u}{xyzu} = \frac{x+y}{xy} \cdot \frac{1}{zu} + \frac{z+u}{zu} \cdot \frac{1}{xy} = a \frac{1}{zu} + c \frac{1}{xy} = d.$$

Most kifejezzük $\frac{1}{y}$ -nal a többi ismeretlen reciprokát és az utolsó egyenletbe helyettesítjük:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= a - \frac{1}{y}, & \frac{1}{z} &= b - \frac{1}{y}, & \frac{1}{u} &= c - \frac{1}{z} = c - b + \frac{1}{y}; \\ a \left(b - \frac{1}{y} \right) \left(c - b + \frac{1}{y} \right) + c \left(a - \frac{1}{y} \right) \frac{1}{y} &= d. \end{aligned}$$

Ebből rendezéssel a következő egyenletet kapjuk $\frac{1}{y}$ -ra:

$$(1) \quad (a+c) \left(\frac{1}{y} \right)^2 - 2ab \left(\frac{1}{y} \right) + ab^2 - abc + d = 0.$$

Az első konstans értékek mellett elsőfokú egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{y} + 7 &= 0, & \frac{1}{y} &= \frac{7}{4}, & \text{így} \\ \frac{1}{x} &= -\frac{3}{4}, & \frac{1}{z} &= \frac{1}{4}, & \frac{1}{u} &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

és az egyenletrendszer megoldása

$$x = -\frac{4}{3}, \quad y = \frac{4}{7}, \quad z = 4, \quad u = -\frac{4}{5}.$$

Ez valóban megoldás, mert $x+y$, $y+z$, $z+u$ és $x+y+z+u$ egyike sem 0, és így minden végzett átalakítás megfordítható.

A matematikai osztályok feladata esetében (1) így alakul:

$$\left(\frac{1}{y} \right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{y} - 16 = 0.$$

Mindkét oldalhoz 25-öt adva

$$\left(\frac{1}{y} + 3 \right)^2 = 25,$$

amiből a következő két lehetőség adódik: $\frac{1}{y} = 2$, és $\frac{1}{y} = -8$. Ennek megfelelően a többi ismeretlen reciprokára is két értéket kapunk:

$$\frac{1}{y} = 2 \text{ esetén} \qquad \frac{1}{x} = -1, \qquad \frac{1}{z} = 1 \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{u} = -3;$$

$$\frac{1}{y} = 8 \text{ esetén} \qquad \frac{1}{x} = 9, \qquad \frac{1}{z} = 11 \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{u} = -13.$$

Innen a következő két gyökrendszer adódik:

$$x = -1, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = 1 \quad \text{és} \quad u = -\frac{1}{3},$$

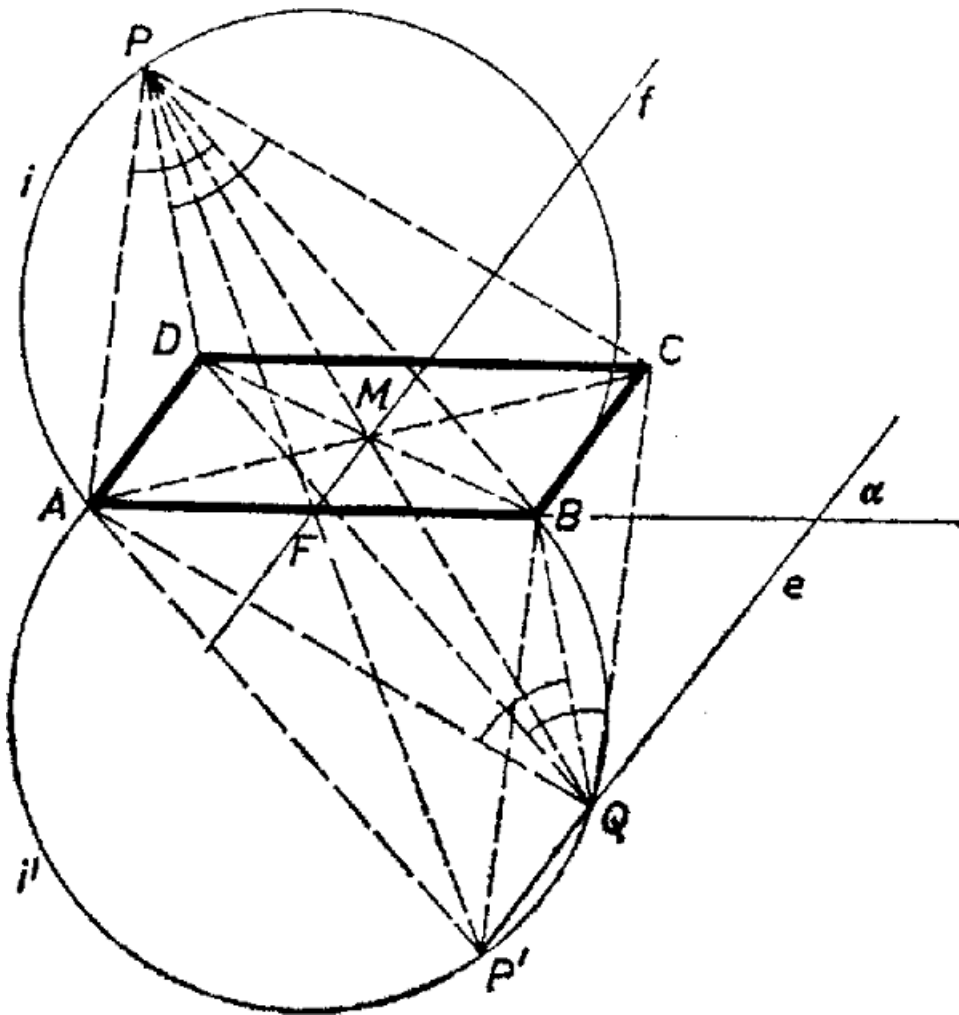
$$x = \frac{1}{9}, \quad y = -\frac{1}{8}, \quad z = \frac{1}{11} \quad \text{és} \quad u = -\frac{1}{13}.$$

Ismét mindkét számnégyes megoldása az egyenletrendszernek.

A két versenyág 2. feladata közös volt.

2. feladat. Adott egy paralelogramma két szomszédos csúcsa és egy szöge, továbbá adott a síknak egy olyan pontja, amelyből az adott csúcsok közti oldal és a vele szemben levő oldal egyenlő szögek alatt látszik. Szerkesszük meg a paralelogrammát.

I. megoldás. Legyenek a keresett $ABCD$ paralelogramma adott csúcsai A és B . Mivel a paralelogramma egy szöge a többit meghatározza, ezért feltehetjük, hogy az adott szög a $DAB \angle = \alpha$. Végül jelöljük a sík adott pontját – amelyből az AB és CD szakasz egyenlő szög alatt látszik – P -vel.



1. ábra

Ha meg tudjuk szerkeszteni a paralelogramma átlóinak M metszéspontját, ezzel a feladatot megoldottuk, mert C az A -nak és D a B -nek M -re vonatkozó tükörképe (1. ábra). Mivel a paralelogramma M -re szimmetrikus, azért P -nek

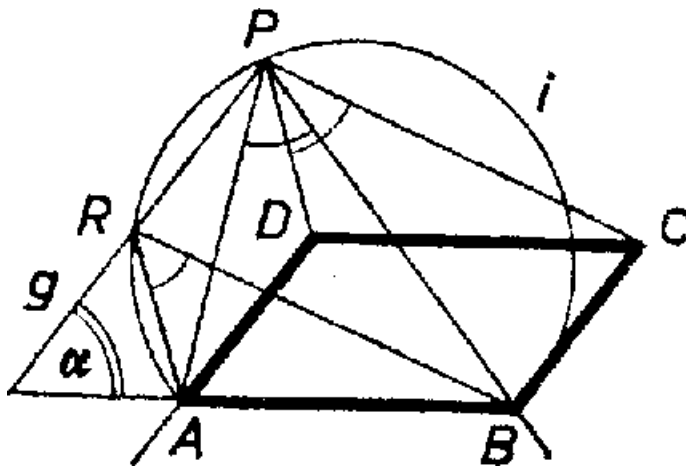
M -re vonatkozó Q tükörképéből is ugyanakkora szög alatt látszik mind az AB , mind a CD szakasz, mint P -ből. A tükrözésből következik, hogy M a PQ szakasz felezőpontja, ezért elegendő a Q pont megszerkesztése. Q rajta van az AB szakasz fölé rajzolt azon két látóörív valamelyikén, amelyek pontjaiból az AB szakasz ugyanakkora szög alatt látszik, mint P -ből, hiszen Q -ból és P -ből az AB szakasz egyenlő szögben látszik.

Másrészt M -en átmennek a paralelogramma középvonalai. Az AD oldallal párhuzamos f középvonalát azonnal meghúzhatjuk, ez átmege az AB szakasz F felezőpontján és α szöget zár be az AB egyenessel. Mivel a PQ szakasz felezőpontja rajta van f -en, azért Q -nak rajta kell lennie azon az f -fel párhuzamos e egyenesen, amely a P -nek az f pontjaira vonatkozó tükörképeiből áll. Így Q , mint a fenti két látóörív és az e egyenes közös pontja, megszerkeszthető.

A szerkesztés a következő: vesszük az ABP háromszög körülírt körének P -t tartalmazó $AB = i$ ívét; ez nyilvánvalóan a szóban forgó látóörívek egyike, a másika pedig ennek i' tükörképe F -re. Kimetsszük i' -n P -nek F -re vonatkozó P' tükörképét. P' -n és F -en át megszerkesztjük az AB -vel α szöget bezáró e , illetőleg f egyenest. Az e és az i, i' pár valamelyik (de P' -től különböző) Q közös pontját P -vel összekötő egyenes f -ből kimetszi M -et, végül A és B tükörképe M -re C , ill. D .

Az $ABCD$ négyszög megfelel a követelményeknek, mert az utolsó két tükrözés miatt paralelogramma, oldalai párhuzamosak FM -mel, tehát $DAB \sphericalangle = \alpha$, végül $CPD \sphericalangle = AQB \sphericalangle = APB \sphericalangle$, mert Q a P tükörképe M -re. A feladat diszkusszióját a III. megoldás után tárgyaljuk.

Megjegyzés. f és M megszerkesztése el is maradhat. D paralelogrammává egészíti ki a PBQ háromszöget, C pedig a BAD háromszöget. – Így természetesen a bizonyítás is módosul: P' szerkesztése szerint $PAP'B$ paralelogramma, D (új) szerkesztése szerint $PBQD$ szintén, így az APD és $P'BQ$ háromszögben az AP és $P'B$, továbbá PD és BQ oldalak egy irányban párhuzamosak és egyenlők, tehát az AD és $P'Q$ oldalak is, vagyis $DA \parallel e$, $DAB \sphericalangle = \alpha$.



2. ábra

II. megoldás. Toljuk el a PCD háromszöget úgy, hogy D csúcsa A -ba kerüljön (2. ábra). Ezáltal C a B -be kerül, P pedig egy olyan R pontba, melyből az AB szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint P -ből CD , vagyis mint P -ből AB . R tehát rajta van az előbbi két látóörív valamelyikén.

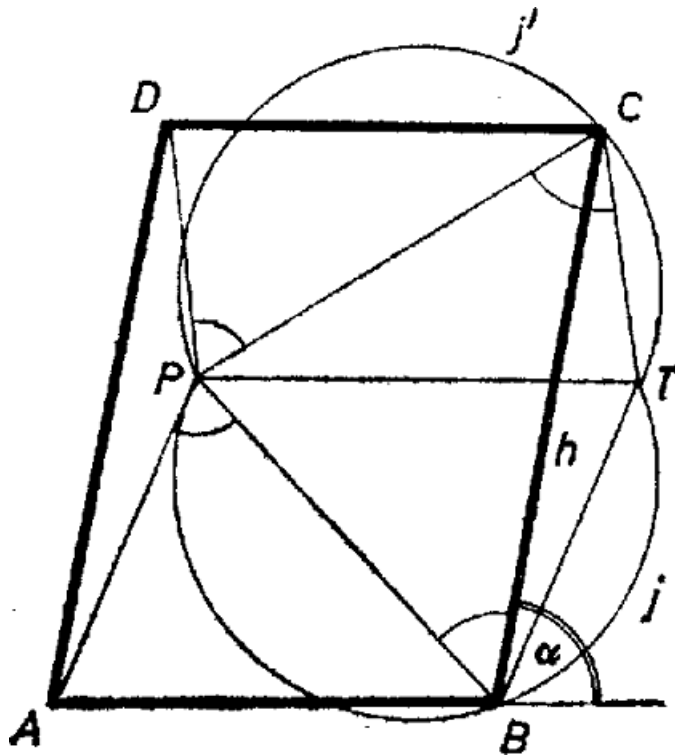
Másrészt az eltolás közben P az AD -vel párhuzamosan mozgott, így R rajta van a P -n átmenő és az AB egyenessel α szöget bezáró g egyenesen. Ezek alapján R , mint g és a két látóörív közös pontja, megszerkeszthető, D pedig paralelogrammává egészíti ki az ARP háromszöget.

III. megoldás. Mindkét fenti megoldásban első lépésként két körív és egy egyenes metszéspontját kerestük meg, ebből kaptuk meg a paralelogramma csúcsait. Az I. megoldásban a metszéspontból előbb a paralelogramma középvonalát határoztuk meg, a II. megoldásban a metszéspontból már közvetlenül kaptuk az egyik csúcsot. Most olyan megoldást adunk, melyben a körívek és egy egyenes metszéspontja mindjárt maga az egyik csúcs. Egészítsük ki a BAP háromszöget a T ponttal a $BAPT$ paralelogrammává (3. ábra). Ekkor a $CDPT$ négyszög is paralelogramma, PA és TB , valamint PD és TC is párhuzamosak, ezért és a feltevés miatt

$$PCT \sphericalangle = CPD \sphericalangle = BPA \sphericalangle = PBT \sphericalangle,$$

vagyis C -ből a PT szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint B -ből. C tehát rajta van azon két j, j' látóörív valamelyikén, melyeknek pontjaiból a PT szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint B -ből. Másrészt C rajta van a B -n átmenő, AB -vel α szöget bezáró h egyenesen is ($CBA \sphericalangle = 180^\circ - \alpha$), tehát C e két mértani hely közös pontja.

Kimutatjuk, hogy e közös pontok bármelyike megfelel C -ként – kivéve természetesen B -t. Mivel C rajta van h -n, azért a paralelogramma szögei megfelelőek, továbbá $PD \parallel TC$. Másrészt C rajta van j és j' valamelyikén, ezért $DPC \sphericalangle = PCT \sphericalangle = PBT \sphericalangle = BPA \sphericalangle$, mint állítottuk.

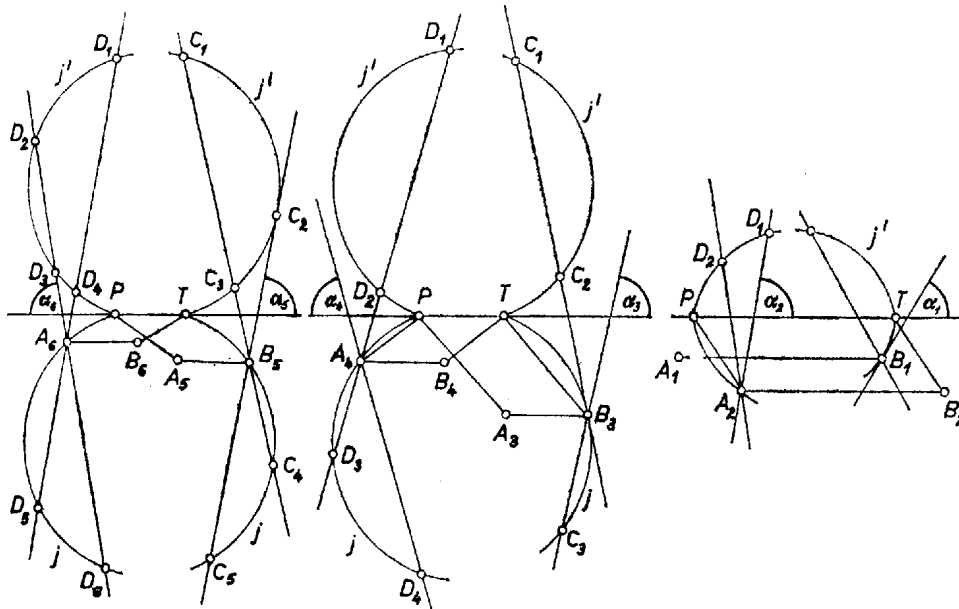


3. ábra

Ezek alapján a szerkesztés a következő: párhuzamost húzunk P -n át AB -vel és B -n át AP -vel, e két egyenes metszéspontja T . Megrajzoljuk a BPT háromszög köré írt kör B -t tartalmazó $PT = j$ ívét és ennek PT -re, való j' tükörképét. Ezután B -n át meghúzzuk azt a h egyenest, amely AB -vel α szöget zár be. Ekkor h -nak j -vel, j' -vel való, B -től különböző közös pontja (e közös pontok bármelyike) adja a paralelogramma C csúcsát.

h -nak mindkét ívvel legfeljebb két közös pontja van, és j -vel mindenesetre közös pontja B , azért a megoldások száma legfeljebb 3. Csak abban az esetben nem kapunk megoldást, ha B a h -nak j -vel egyetlen közös pontja, és itt érintkeznek, j' -vel pedig nincs közös pontja. (*Ha ugyanis h a j -t B -ben metszi, akkor van pontja a j , j' ívekkel határolt idom belsejében, így a kilépési pont megfelel C -ként.)

Ha elejtjük azt az előírást, hogy az adott szög a paralelogramma A -nál levő szöge legyen, akkor h -nak az AB egyenesre való h^* tükörképe is tekintetbe veendő. Ekkor a megoldások száma 6, 5, 4, 3, 2 vagy 1 (a 4–6. ábrákon példákat látunk ilyen helyzetekre, 1 megoldás van az 1–3. ábrák helyzeteiben is). Kimutatjuk ugyanis, hogy így minden esetben létezik legalább 1 megoldás. (A 4–6. ábrák 2–2 felén csak P és T közös.)



4. ábra

5. ábra

6. ábra

Elég az olyan helyzeteivel foglalkoznunk h^* -nak, amelyekben fentebb h nem adott megoldást. Ekkor h^* – amennyiben különböző a h -tól – nem érinti, hanem metszi j -t B -ben és a fenti (*) megjegyzés szerint megoldást szolgáltat.

Ha pedig h^* egybeesik h -val, akkor $\alpha = 90^\circ$ (mert $\alpha = 0^\circ$ nyilvánvalóan nem jön szóba), így h merőleges PT -re, és mivel B -ben érinti j -t, azért a szimmetria miatt B -nek PT -re való tükörképében érinti j' -t, ez a közös pont megoldást ad.

Könnyű belátni, hogy j, j' az I. és II. megoldásban szerepelt i, i' körívpárból AP irányú és nagyságú eltolással áll elő, hogy ugyanez áll fenn h és az I. megoldásbeli e egyenes között, végül hogy a II. megoldásbeli g egyenes az e tükörképe F -re. Ezért a III. megoldásra adott diszkusszió a megfelelő változtatásokkal az I. és II. megoldásra is érvényes.

*

Az általános verseny 3. feladata: Határozzuk meg a (tíz-es alapú számrendszerben felírt) $ABCC$ számot, ha

$$ABCC = (DD - E) \cdot 100 + DD \cdot E,$$

ahol A, B, C, D és E különböző számjegyek.

Megoldás. A szereplő többjegyű számokat a következőképpen alakítjuk át:

$$ABCC = 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 11 \cdot C, \quad DD = 11 \cdot D.$$

Ezeket behelyettesítve rendezzünk úgy, hogy a bal oldalra kerüljenek azok a tagok, amelyekben az egyik tényező 100, a többiek a jobb oldalra:

$$(2) \quad (10 \cdot A + B - 11 \cdot D + E) \cdot 100 - 11 \cdot (D \cdot E - C),$$

így a jobb oldalnak is oszthatónak kell lennie 100-zal. Ez csak úgy lehetséges, ha $D \cdot E - C$ osztható 100-zal. Mivel D, E és C mindegyike 0 és 9 közé esik, és különbözők, azért $D \cdot E - C$ legfeljebb $9 \cdot 8 - 0 = 72$, és legalább $0 \cdot 1 - 9 = -9$. Márpedig -9 és 72 között csak egyetlen 100-zal osztható szám van, mégpedig 0, így $D \cdot E = C$, továbbá (2) bal oldalán is 0-nak kell állnia, ezért a zárójelen belüli kifejezés 0. Írjunk ebben $10 \cdot A$ helyett $11 \cdot A - A$ -t, és rendezzük át az egyenletet:

$$B + E - A = 11 \cdot (D - A).$$

Mivel D és A különbözők, ezért a jobb oldal, s így a bal oldal is 0-tól különböző szám. Továbbá a jobb oldal osztható 11-gyel, tehát a bal oldal is. Ezek szerint $B + E - A$ 11-gyel osztható és 0-tól különböző (egész) szám. Másrészt, mivel B, A és E ugyancsak 0 és 9 közé esnek és $A \neq 0$, ezért $B + E - A$ legfeljebb $9 + 8 - 1 = 16$, és legalább $0 + 1 - 9 = -8$. Mármint -8 és 16 között 0-tól különböző és 11-gyel osztható szám csak egy van, a 11. Ezért $B + E - A = 11$, amiből $D - A = 1$ adódik.

Eddig tehát a következőket állapítottuk meg:

$$D \cdot E = C, \quad B + E - A = 11 \quad \text{és} \quad D = A + 1.$$

A harmadik egyenlőségből A -t kifejezve és a másodikba behelyettesítve:

$$B + E = D + 10,$$

amit átrendezve:

$$E = D + (10 - B).$$

Mivel B legfeljebb 9, ezért $10 - B$ legalább 1, és így E legalább $D + 1$, más szóval E nagyobb D -nél. Ennek alapján $D \cdot D$ kisebb, mint $D \cdot E$, vagyis C , ami legfeljebb 9; azaz D^2 kisebb 3^2 -nél, D kisebb 3-nál. Másrészt $D = A + 1 \geq 2$, így $D = 2$, amiből $A = 1$, továbbá

$$C = 2E \quad \text{és} \quad B + E = 12.$$

$E > D$ miatt $E \geq 3$. Másrészt $E \leq 4$, különben C kétjegyű szám lenne. Az $E = 4$ esetben $C = B (= 8)$ adódik, ami ismét nem felel meg a számjegyek különbözőségének. Az egyetlen maradó lehetőség $E = 3$, amiből $C = 6$, és $B = 9$.

A jegyek adódott értékei valóban kielégítik a feltételeket:

$$1966 = (22 - 3) \cdot 100 + 22 \cdot 3.$$

A matematikai osztályok versenyének 3. feladata: Keressük meg az olyan hatjegyű négyzetszámokat, amelyeknek első három jegyét letörölve a szám négyzetgyökét kapjuk.

Megoldás. Jelöljük a szám négyzetgyökét x -szel. x^2 hatjegyű szám, ezért x háromjegyű és x^2 első három jegyét letörölve keletkezik, vagyis az x^2 utolsó három jegyéből álló szám. Így tehát $x^2 - x = x(x - 1)$ utolsó három jegye 0, osztható 1000-rel. Feladatunk tehát olyan x háromjegyű számok keresése, melyekre $x(x - 1)$ osztható $1000 = 125 \cdot 8$ -cal.

Vizsgáljuk a 125-tel való oszthatóságot. Mivel $x(x - 1)$ osztható 125-tel, ezért osztható 5-tel is. x -nek és $x - 1$ -nek legnagyobb közös osztója 1, ezért x és $x - 1$ közül csak egyik lehet 5-tel osztható. Ekkor viszont az 5-tel osztható tényező osztható 125-tel is, így azt kaptuk, hogy x és $x - 1$ egyike osztható 125-tel.

Hasonló okoskodással belátható, hogy a két tényező valamelyike osztható 8-cal. Az azonban nem lehet, hogy ugyanaz a tényező osztható 125-tel és 8-cal, ekkor ugyanis ez a tényező osztható lenne $125 \cdot 8 = 1000$ -rel is, tehát legalább négyjegyű szám lenne. Így x és $x - 1$ egyike 125-tel és a másik 8-cal osztható. Olyan többszörösét kell keresnünk a 125-nek, amelyiknek valamelyik szomszédja, vagyis az 1-gyel kisebb vagy 1-gyel nagyobb szám osztható 8-cal. Ez a szomszéd páros is és 4-gyel is osztható, ezért elég 125 páratlan többszörőseivel próbálkozni, ezek: 125, 375, 625 és 875. Szomszédjaik közül a 26-ra és 74-re végződők még 4-gyel sem oszthatók, 124 és 876 sem osztható 8-cal, így csak két számpár marad: $x = 376$ és $x - 1 = 375$, valamint $x = 625$ és $x - 1 = 624$.

Valóban: $376^2 = 141\mathbf{376}$ és $625^2 = 390\mathbf{625}$.

Fried Ervin