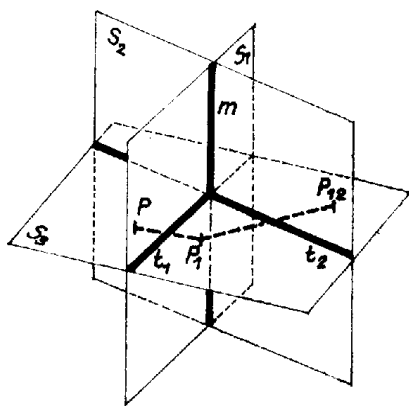


Az 1432. feladat¹ III. részében láttuk, hogy a tetraéder a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1, \varphi_2$ forgatások végrehajtásával visszajut eredeti helyzetébe. Jól megnézve a közben elfoglalt helyzetek sorozatát, azt látjuk, hogy az S csúcs váltakozva csak két helyzetet foglal el, a H_1, H_5, H_9 helyzetekben középen, H_2 -ben, H_6 -ban és H_7 -ben pedig jobbról áll. Ez azt jelenti, hogy egy φ_1 és egy rá következő φ_2 forgatás eredője a középső csúcsot a helyén hagyja, tehát helyettesíthető egyetlen forgatással, melynek tengelye a tetraédernek az elől középen levő csúcsból kiinduló magasság-egyenese. Ha pedig e két forgatás sorrendje φ_2, φ_1 , akkor az eredőt helyettesítő egyetlen forgatás tengelye a jobbról álló csúcsból kiinduló magasság egyenese. A forgatás szöge mindkét helyzet-hármas bármelyik két egymás utáni helyzete között 240° , a csúcstól a lap felé tekintve pozitív forgási irányban. Így már H_1, H_2, H_5 és H_6 elemzéséből is kiadódott volna, hogy bármelyik forgás-pár 3-szori alkalmazásával a tetraéder ugyanazon tengely körül $3 \cdot 240^\circ$ -kal, azaz $2 \cdot 360^\circ$ -kal fordul el, vagyis visszajut kiindulási helyzetébe.

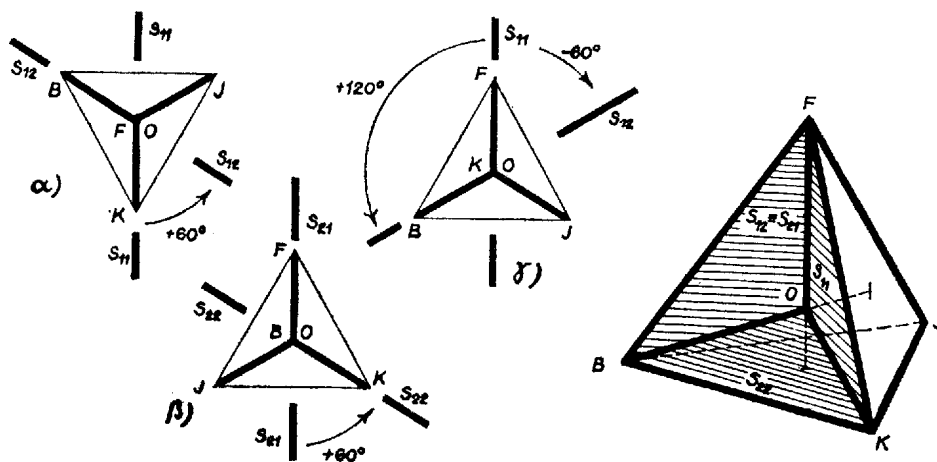
Alább más úton mutatom meg, hogy egy φ_1, φ_2 forgás-pár helyettesíthető a mondott forgással. Ismeretes a síkmértanból, hogy két metsző egyenesen való egymás utáni tükrözés helyettesíthető olyan forgatással, melynek középpontja a két tükrözés tengelyének metszéspontja, a forgatás szöge pedig kétszer akkora, mint az első tengelyt a másodikba átvivő forgatás szöge (a második tükrökép, valamint a tengely elfordulását ugyanabban az irányban értve). Ebből következik, hogy ha a két tükröző egyenest metszéspontjuk körül úgy forgatjuk, hogy hajlásszögük nem változik, akkor a két tükrözés eredője sem változik.



1. ábra

Fordítva, egy forgatás helyettesíthető két olyan egymás utáni tükrözéssel, amelyek tengelyei átmennek a forgás középpontján és az első tükrözés tengelyét a másodikéba fele akkora szögű (ugyanolyan irányú) forgatás viszi át. Ha tehát adott egy forgatás középpontja, szöge és iránya, és megválasztottuk a forgatást helyettesítő tükrözés-pár egyikének tengelyét (a középponton át, és azt is kimondva, hogy ez az első vagy a második tükrözésnek legyen a tengelye), ezzel egyértelműen meghatároztuk a másik tükrözés tengelyének helyzetét.

Mindez a térben is érvényes, ha egyeneseken való tükrözések helyett két egymást metsző síkon tükrözünk egy alakzatot egymás után, a síkok sorrendjét is megadva, és ha a forgatás tengelyének a két sík metszévonalát vesszük. Ha ugyanis az alakzat egy tetszés szerinti P pontjának tükröképe egy S_1 síkra P_1 , ennek képe egy az S_1 -et m -ben metsző S_2 síkra P_{12} , akkor $PP_1 \perp S_1$, $P_1P_{12} \perp S_2$, így a $PP_1P_{12} = S_3$ sík merőleges S_1 -re, S_2 -re és m -re. Ezért P -nek m körüli forgatása S_3 -ban folyik le m és S_3 metszéspontja körül, az S_1 -et S_2 -be átvivő forgás szögét ugyancsak S_3 -ban mérhetjük meg, ennek S_1 -gyel alkotott t_1 és S_2 -vel alkotott t_2 metszévonalai között, ennél fogva P_1 -et, P_{12} -t megadja a t_1 -re, majd a t_2 -re való tükrözés is.



2. ábra

¹Lásd K. M. L. 33 (1966) 124. o.

Az előbbiek szerint a φ_1 forgatás helyettesíthető két olyan S_{11} és S_{12} síkra, való egymás utáni tükrözéssel, melyeknek metszésvonala a tetraéder F -ből kiinduló magasságának egyenese, hajlásszögük 60° , és az S_{11} -et S_{12} -be átvivő forgás F -ből a BKJ lap felé nézve pozitív irányú. Ugyanígy φ_2 helyettesíthető két olyan a B -ből induló magasságegyenesen átmenő S_{21} és S_{22} síkra való egymás utáni tükrözéssel, ahol az S_{21} -et S_{22} -be átvivő 60° -os forgás B -ből az FJK lap felé nézve pozitív irányú. Jelentős egyszerűsödést érünk el mármost annak felhasználásával, hogy a két síkpár metszésvonalai a tetraéder O középpontjában metszik egymást, ha S_{12} -ként is, S_{21} -ként is az FOB síkot választjuk. Ekkor a harmadik tükrözés lerontja a második tükrözés hatását (az S_{21} -en való tükrözés visszaállítja az S_{12} -n való tükrözés előtti helyzetet), csak az S_{11} -en való tükrözéssel előállított képet kell tükröznünk S_{22} -re; e két tükrözés egymásutánja pedig helyettesíthető lesz egyetlen forgatással a metszésvonaluk körül.

Mármost a közös FOB síkhoz mint S_{12} -höz S_{11} -ként az FOK sík tartozik hozzá, mint S_{21} -höz S_{22} -ként a BOK sík (a 2. ábra α és β részén a nézőhöz legközelebbi csúcs F , illetőleg B). E két sík metszésvonala KO , és az S_{11} -et S_{22} -be $+120^\circ$ -os forgás viszi át (γ rész), tehát $\varphi_1\varphi_2$ eredője a KO tengely körüli $+240^\circ$ -os forgatás. (Természetesen ha negatív forgási irányt kívánunk, a két sík forgási szöge -60° , és az eredő forgás -120° -os.)

A bemutatott meggondolás más esetekben is alkalmas forgások, tükrözések eredőjének meghatározására.

Vigassy Lajos