

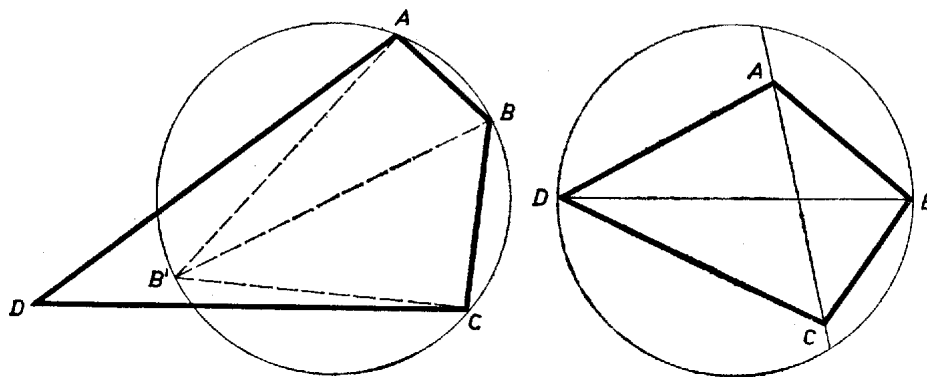
Az 1965. évi Arany Dániel tanulóversenyek II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) versenye

A speciális matematikai osztályok feladatai

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszögnek 3 szöge tompaszög, akkor a negyedik szög csúcsából kiinduló átló hosszabb a másik átlónál.

I. megoldás. Legyen az $ABCD$ konvex négyszög A , B és C csúcsánál levő szöge tompaszög. Írjunk kört az A , B , C csúcsok köré, ennek B -vel átellenes pontja legyen B' . Ez a BAD szögtartománynak is, a BCD szögtartománynak is a belsejében van, ugyanis Thalész tétele szerint $BAB' \sphericalangle = BCB' \sphericalangle = 90^\circ$, az AB' és CB' félegyenes is a megfelelő szögtartomány belsejében halad. Ebből következik, hogy a $BB'D$ konvex szög a $BAD \sphericalangle$, $BOD \sphericalangle$ egyikénél nagyobb, tehát tompaszög. Így a $BB'D$ háromszög legnagyobb oldala nagyobb BB' -nél, ez pedig, mint körátmérő, nem kisebb a kör AC húrjánál.



II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit és feltételeit használjuk. Rajzoljunk kört a BD átló mint átmérő fölé. Azok a pontok, amelyekből BD tompaszögben látszik, a kör belsejében vannak, így A és C is. AC tehát a kör belsejében levő szakasz, s így kisebb, mint a kör átmérője, BD .

Megjegyzés. Csak azt használtuk fel mind a két megoldásban, hogy A -nál és C -nél tompaszög van. Ebből a négyszög konvex volta is következik. Így azt bizonyítottuk be, hogy ha egy négyszög két szemben fekvő szöge tompaszög, akkor az ezek csúcsát összekötő átló rövidebb a másik átlónál.

A verseny 2. feladata ugyanaz volt, mint az általános versenyen; megoldását lásd ezen kötet 52-53. oldalain.

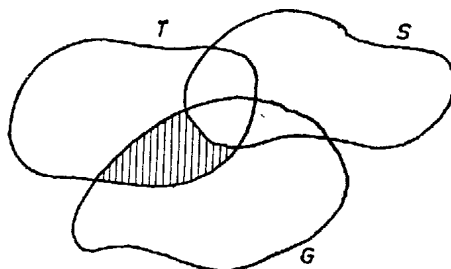
3. feladat. Fogadjuk el igaznak a következő állításokat:

a) Van olyan televízió-tulajdonos, aki nem szobafestő.

b) Akinek bérlete van a Gellért-fürdőbe, de nem szobafestő, az nem televízió-tulajdonos.

Döntsük el és indokoljuk meg, hogy következik-e a)-ból és b)-ből az alábbi állítás:

c) Nem minden televízió-tulajdonosnak van bérlete a Gellért-fürdőbe.



1. megoldás. Rajzoljunk a síkban egy T , egy S és egy G tartományt úgy, hogy legyen mindháromnak közös része, bármely kettő közös részének legyen olyan része, amelyik nem tartozik a harmadikhoz, és legyen mindegyiknek a másik kettőn kívül eső része is. Gondoljuk a televízió-tulajdonosokat a T -tartomány belsejének pontjaival jelölve, a szobafestőket az S pontjaival, azokat pedig, akiknek bérletük van a Gellért-fürdőbe, a G pontjaival. Ekkor a b) állítás azt jelenti, hogy a G -be, de S -en kívül teendő pontok, ha vannak, nem kerülhetnek T -be sem, tehát az a tartomány, ami

T -hez és G -hez is tartozik, de S -en kívül fekszik, egyetlen kijelölt pontot sem tartalmaz. Ezt az ábrán vonalkázással jelöltük.

Az $a)$ állítás szerint van pont a T -nek B -hez nem tartozó részében. Ez nem kerülhet a bevonalkázott részbe, tehát G -n is kívül van, vagyis olyan televízió-tulajdonost jelöl, akinek nincs bérlete a Gellért-fürdőbe. Eszerint a $c)$ állítás következik $a)$ -ból és $b)$ -ből.

II. megoldás. A $b)$ állítás így is fogalmazható: nincs olyan televízió-tulajdonos, aki nem szobafestő, de bérlete van a Gellért-fürdőbe. Eszerint egy olyan televízió-tulajdonosnak, akire az $a)$ állítás teljesül, nem lehet bérlete a Gellért-fürdőbe. Mivel az $a)$ állítás ilyen személy létezését mondja ki, így $a)$ -ból és $b)$ -ből következik a $c)$ állítás.

Surányi János