

Első feladat. Mely egész a , b , c értékek elégítik ki az

$$(*) \quad a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$$

egyenlőtlenséget?

Megoldás. Minthogy egyenlőtlenségünk mindkét oldalán egész szám áll, az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a baloldal legalább 1-gyel kisebb a jobboldalnál, ha tehát

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \leq ab + 3b + 2c.$$

Ezt az egyenlőtlenséget

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (c - 1)^2 \leq 0$$

alakba írva megállapíthatjuk, hogy csak akkor teljesülhet, ha benne minden négyzet alapja 0, hiszen különben a baloldalon pozitív szám állana. Eszerint

$$a - \frac{b}{2} = 0, \quad \frac{b}{2} - 1 = 0, \quad c - 1 = 0,$$

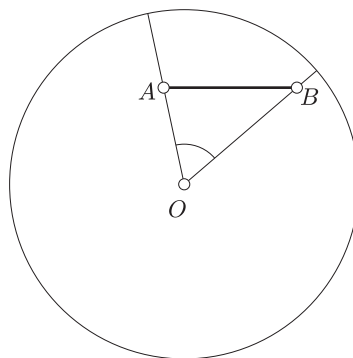
és az egyetlen megoldás

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1.$$

Második feladat. Egy körlemezen 8 pontot veszünk fel (a határoló körvonalat is a körlemezhez számítjuk). Bizonyítsuk be, hogy a 8 pont között van két olyan, amelynek távolsága a kör sugaránál kisebb.

I. megoldás. A 8 pont között legalább 7 a kör középpontjától különböző pont van. Minden ilyen pont a középponttal összekötve a kör egy-egy sugarát határozza meg. Ha ezek a sugarak nem mind különbözők, két pont ugyanannak a sugárnak a körközeponttól különböző pontja, s így távolságuk a sugárnál kisebb.

Ha viszont csupa különböző sugárhoz jutottunk, akkor ezek az O középpontnál elhelyezkedő teljes szöget legalább 7 szögre bontják fel, s ezért van közöttük két olyan sugár, amelynek szöge a teljes szög hatodrésznél, 60° -nál kisebb. Legyen a 8 pont közül való A és B ezen a két sugáron (1. ábra).

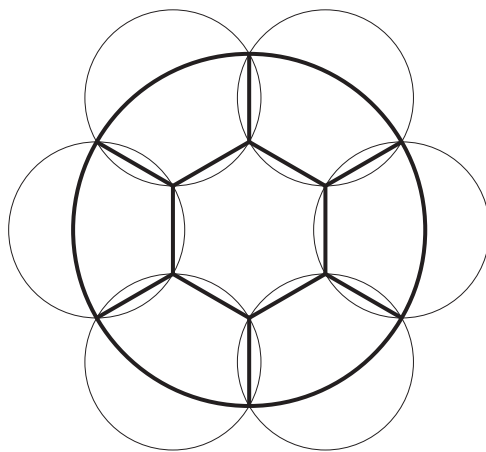


1. ábra

Minthogy $AOB < 60^\circ$, van az $OAB\triangle$ -nek nagyobb szöge is. A háromszög szögeiről és szemközti oldalairól szóló tételre hivatkozva kimondhatjuk ezért, hogy az $OAB\triangle$ -nek van AB -nél nagyobb oldala, hogy tehát AB kisebb az OA , OB távolságok valamelyikénél, s így kisebb az utóbbiaknál nem kisebb körsugárnál is.

Minden esetben eljutottunk tehát a 8 pont közül két olyanhoz, amely kielégíti a feladat követelményét.

II. megoldás. A körlemezt egy beírt szabályos hatszög csúcsaihoz vezető 6 sugár és ezek felezőpontjai által meghatározott szabályos hatszög segítségével 7 tartományra bontjuk fel (2. ábra). E tartományok mindegyike egy-egy olyan körben helyezkedik el, amelynek átmérője az eredeti kör sugara. Ez az eredeti körrel koncentrikus és feleakkora sugarú körre, valamint a beírt szabályos hatszög oldalaihoz tartozó Thales-körökre valóban teljesül.



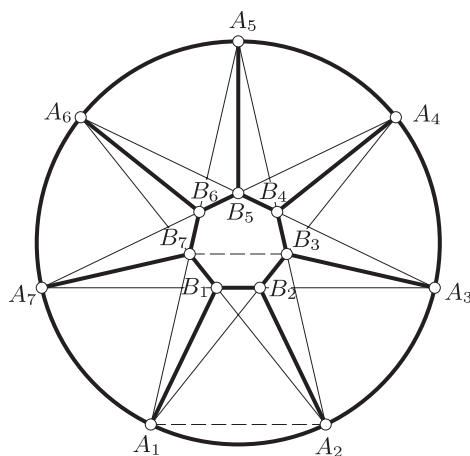
2. ábra

Tekintsük most a megadott 8 pontot, és forgassuk el a kört tartományokra felosztó vonalakat a kör középpontja körül úgy, hogy a 8 pont egyike se essék felosztó vonalra. Ekkor a 7 tartomány valamelyikében legalább két pontnak kell elhelyezkednie. E két pont az illető tartományt leborító kör belsejében van, s így távolságuk a kör átmérőjénél, azaz az eredeti kör sugaránál kisebb.

Megjegyzések. 1) Nyilvánvaló, hogy a feladatban nem írhatunk 8 helyébe 7-et, hiszen a kör középpontja és egy beírt szabályos hatszög csúcsai 7 olyan pont, amelyek között nem lép fel a kör sugaránál kisebb távolság. Első megoldásunkból azt is kiolvashatjuk, hogy más ilyen ellenpélda nincs.

2) Jelölje a_n a körbe írt szabályos n -szög oldalát. A feladat állítása szerint a körlemezen felvett 8 pont között van kettő, amelynek távolsága a_6 -nál kisebb. Bebizonyítjuk, hogy *a két pont mindig megválasztható úgy is, hogy távolságuk ne legyen a_7 -nél nagyobb*. A kör középpontja és egy beírt szabályos hétszög csúcsai mutatják, hogy a tétel állítása ilyen irányban tovább már nem finomítható.

A bizonyítás gondolatmenete második megoldásunkéhoz hasonló, de bizonyos szempontból azzal éppen ellentétes lesz. A kört most 8 tartományra bontjuk fel. Egy beírt szabályos hétszög leghosszabb átlói egy kisebb szabályos hétszöget burkolnak. Ennek csúcsai az eredeti hétszög csúcsaihoz vezető sugarakon helyezkednek el. A felbontást most a kisebb hétszög és a hétszögcsúcsokat összekötő sugárszakaszok szolgáltatják (3. ábra).



3. ábra

Azt állítjuk, hogy a 8 tartomány bármelyikén veszünk is fel két pontot (határpont felvételét is megengedve), ezek távolsága a_7 -nél nagyobb nem lehet. Ez a kis hétszög esetében nyilvánvaló, hiszen egy szabályos hétszög pontjai közül egy legnagyobb átló végpontjai vannak egymástól legtávolabbra, és a kis hétszög B_7B_3 átlója az ábra $A_1A_2A_5\triangle$ -éből kiolvashatóan kisebb, mint $A_1A_2 = a_7$.

A szektorszerű $A_1A_2B_2B_1$ tartományra térve először is belátjuk, hogy $A_1A_2 = A_2B_1$ (s ugyanígy $= A_1B_2$). Ez abból adódik, hogy az $A_1A_2B_1A_7$ négyszög rombusz, mert szemközti oldalai párhuzamosak és $A_7A_1 = A_1A_2 = a_7$, így tehát az A_1B_1 átló a rombuszból egyenlőszárú háromszöget vág le. Ennek szárszöge a kör egyharmadánál kisebb íven (ti. kétheteden) nyugvó kerületi szög, ezért 60° -nál kisebb, s így az egyenlőszárú háromszög A_1B_1 alapja az $A_1A_2 = a_7$ szárnál kisebb.

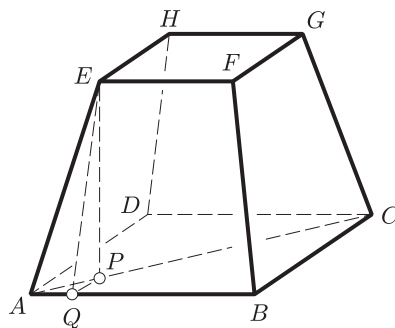
Ha a szektorszerű tartományban két egymástól maximális távolságra levő pontot keresünk, nyilván csak a határvo-nal pontjai jöhetnek szóba. A maximális szakasz végpontjai között nem szerepelhet egy határoló szakasz belső pontja, mert valamely pontnak egy szakasz pontjaitól mért távolságai közül a maximális értéket csak végponttól mért távolság

adhatja. Nem szerepelhet a maximális szakasz végpontjai között az A_1A_2 körív belső pontja sem, mert a körlemez valamely (a középponttól különböző) pontjának egy körív pontjaitól mért távolságai közül a maximális értéket szintén csak végponttól mért távolság adhatja. Így tehát a keresett maximális szakasz mindkét végpontja csak az A_1, A_2, B_2, B_1 pontok közül való lehet, s e pontok távolságainak maximuma, mint láttuk, valóban a_7 .

Tekintsük most már a körlemez megadott 8 pontját. Ha mindannyian a kis hétszögben vannak, akkor bármelyik kettőnek a távolsága kisebb, mint a_7 . Ha nem ez a helyzet, forgassuk el a tartományainkat határoló vonalakat a kör középpontja körül úgy, hogy a 8 pont valamelyike elválasztó vonalra essék. Ekkor a tartományok mindegyike tartalmaz a belsejében és a határán valahány pontot (esetleg egyet sem) a 8 pont közül. E számok összege legalább 9, hiszen van olyan pont, amelyet kétszer is figyelembe vettünk. Kell tehát a 8 tartomány között olyannak lennie, amely a határát is hozzászámítva legalább két pontot tartalmaz pontjaink közül. E kettőnek a távolsága azonban a fentiek szerint legfeljebb a_7 , s ez állításunk helyességét bizonyítja.

Harmadik feladat. *Olyan felfelé keskenyedő, négyzetalapú szabályos csonkagúlát tekintünk, amelynek az alaplappja köré írt kör sugara kisebb, mint az oldallapjai köré írt körök sugara. Bizonyítsuk be, hogy egy testátló két végpontját összekötő, a csonkagúla felületén haladó legrövidebb vonal a csonkagúla palástján helyezkedik el.*

Megoldás. Tekintsük az $ABCD$ alapú, $EFGH$ fedőlapú szabályos csonkagúlát (4. ábra). A forgásszimmetria miatt mindegy, hogy melyik testátló végpontjait összekötő vonalakkal foglalkozunk. Ha az AG testátlót választjuk, megállapíthatjuk, hogy minden összekötő vonalnak metszenie kell a térbeli $BCDHEF$ hatszöget. Minthogy pedig e hatszög minden pontját A -val és G -vel a csonkagúla felületén elhelyezkedő szakasz köti össze, és két pont összekötő szakasza minden más összekötő vonalnál rövidebb, a legrövidebb összekötő vonal csak két szakaszból álló töröttvonal lehet.



4. ábra

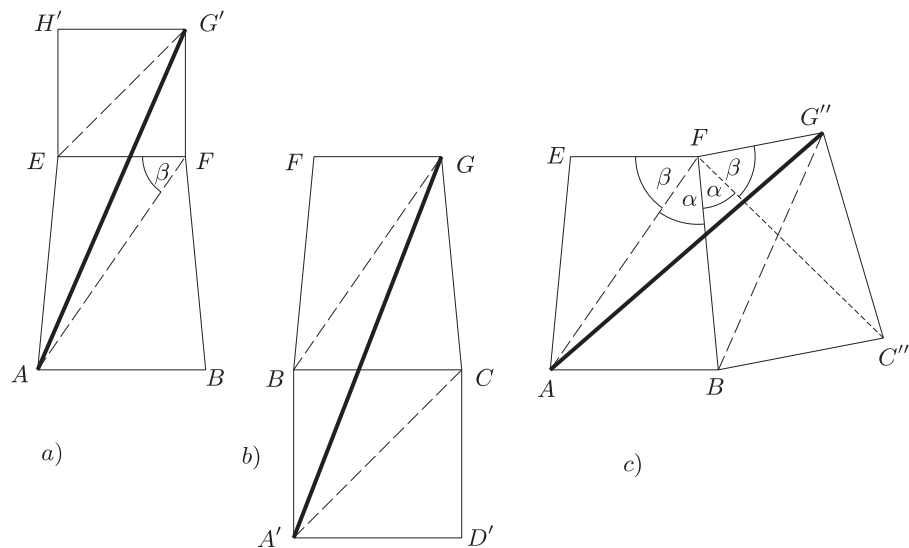
Ez vagy egy oldallapon és a fedőlapon, vagy az alaplapon és egy oldallapon, vagy pedig két oldallapon helyezkedik el. A szimmetria miatt mindegy, hogy itt melyik oldallap vagy melyik két szomszédos oldallap szerepel.

A vizsgált töröttvonal mindhárom esetben két olyan lapon halad, amelyek élben csatlakoznak. Ha e lapokat az él körül egy síkba forgatjuk, a töröttvonal is a síkba kerül, s akkor lesz a legrövidebb, ha a kiterítés után nincs már törése, azaz a végpontokat összekötő egyetlen szakasszá válik. Ez persze csak akkor lehetséges, ha a kiterítés után adódó végpontok összekötő szakasza metszi a két lap közös élet. Megmutatjuk, hogy ez a bennünket érdeklő esetek mindegyikében bekövetkezik.

Csonkagúlánk $ABFE$ oldallapja szimmetrikus trapéz, melynek AB alapvonalán 45° -nál nagyobb (és EF fedővonalán 135° -nál kisebb) szögek nyugszanak. Ha ugyanis P és Q az E csúcsnak az alapsíkra, illetőleg az AB élre vetett vetülete, akkor az $APQ\Delta$ egyenlőszárú derékszögű, tehát $EQ > PQ = AQ$ miatt az $AEQ\Delta$ -ben a nagyobbik befogóval szemközti $EAQ < > 45^\circ$.

A feladat követelményére támaszkodva most azt igazoljuk, hogy $\alpha = AFB < 45^\circ$. Az alaplapon köré írt körben az AB húron 45° -os (és 135° -os) kerületi szögek nyugszanak. Minthogy az oldallapon köré írt kör sugara nagyobb, ebben az AB húron nyugvó kerületi szögek 45° -nál kisebbek és 135° -nál nagyobbak. Mivel pedig az $AFB <$ része a 135° -nál kisebb $EFB <$ -nek, valóban csak 45° -nál kisebb lehet.

Tekintsük most már az említett három esetnek megfelelő, kiterítéssel keletkező ábrákat (5. ábra). A testátló végpontjaiból a kiterítés után adódó pontokat összekötő (vastagon meghúzott) szakasz mind a három esetben metszi a két lap közös élet. Mindhárom esetben szerepel ugyanis olyan konvex négyszög, amelynek egyik átlója a közös él, másik átlója pedig a szóban forgó összekötő szakasz. E négyszögek két szemközti oldalát szaggatottan húztuk meg. Konvexitásuk csak az a) és c) ábrarészben kíván alátámasztást, s az a) ábrában $AEF < 135^\circ$, valamint $FEG' < 45^\circ$, a c) ábrában pedig $AFB < 45^\circ$, valamint $BFG'' < 135^\circ$ következménye.



5. ábra

Már csak annak megmutatására van szükségünk, hogy a vastagon meghúzott szakasz a c) ábrában a legrövidebb. A b) ábra szakasza nyilván hosszabb az a) ábráénál, hiszen vízszintes (a közös él egyenesére vetett) vetülete ugyanakkora, függőleges vetülete pedig nagyobb, mert az alapél nagyobb, mint a fedőél. Azt kell csak bizonyítanunk, hogy az a) és c) ábra szakaszaira $AG' > AG''$. Ezek a szakaszok az $AFG'\triangle$ és $AFG''\triangle$ oldalai, amelyekben két-két oldal páronként egyenlő. Ezért az ismert tételre hivatkozva

$$AFG' \sphericalangle > AFG'' \sphericalangle$$

igazolása szükséges, ez azonban $\beta = AFE \sphericalangle$ jelöléssel

$$90^\circ + \beta > 2\alpha + \beta$$

alakban írható, s a már bizonyított $\alpha < 45^\circ$ következménye.

Hajós György