Lapunk a 30. kötet 5. számában pályázatot hirdetett. A pályázóknak a

$$7x^3 - 3y^3 = z^2 \tag{1}$$

egyenletről kellett megmutatniuk, hogy van végtelen sok független megoldása, tehát olyan, amelyek közül semelyik kettő nem származtatható ugyanazon x_0, y_0, z_0 megoldásból alkalmas u és v egész számmal x_0u^2, y_0u^2, z_0u^3, ill. x_0v^2, y_0v^2, z_0v^3 alakban, továbbá a probléma általánosításait keresni.

A beérkezett 6 pályamunka mindegyike megoldja az (1) egyenletre vonatkozó feladatot. Négy pályázó, Berkes István, Füvesi István, Gáspár András és Herényi István foglalkozik ezen túl az

$$ax^k + bx^k = cz^n \tag{2}$$

és az

$$a_1x_1^k + a_2x_2^k + \ldots + a_sx_s^k = z^n \tag{3}$$

alakú egyenletek egész megoldásaival is, abban az esetben, ha k és n egymáshoz relatív prím természetes számok. Berkes ezeken a kereteken messze túlmenve alaposan és pontosan megvizsgálja, milyen általánosítási lehetőségek adódnak. Sok esetben azt mutatja meg, hogy a keletkező egyenletekre a fentihez hasonló állítások nem érvényesek. Dolgozata széleskörű ismeretanyagról tanúskodó, gondos munka.

Ezek alapján első díjat nyert (100 Ft)

Berkes István (Budapest, Fazekas Mihály gyak. g. IV. o. t.),

második díjat nyert (50–50 Ft)

Füvesi István (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. IV. o. t.),

Gáspár András (Budapest, Vasútgépészeti techn. III. o. t.) és

Herényi István (Budapest, I. István g. IV. o. t.),

dicséretben részesült

Karsai István (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.) és

Vas Péter (Budapest, Fehérvári úti 12 évf. isk. IV. o. t.).

*

Az alábbiakban az (1), (2) és (3) egyenletek egész megoldásaival foglalkozunk. Berkes ezeken túlmenő vizsgálataira nem térhetünk ki, mert azok minden tekintetben meghaladják lapunk kereteit.

Könnyű látni, hogy az (1) egyenlet olyan megoldásai, amelyekben valamelyik ismeretlen 0, az $x = y = z = 0$, az $x = 7r^2$, $y = 0$, $z = 49r^3$ és az $x = 0$, $y = -3r^2$, $z = 9r^3$, ahol r tetszés szerinti egész szám. A továbbiakban csak 0-tól különböző egészekből álló megoldásokkal foglalkozunk. Áttekintést adunk (1) összes megoldásáról és megvizsgáljuk, mikor lesz ezek közül kettő független.

Legyen x, y, z az (1) egyenlet egy egész számokból álló megoldása, és tegyük fel, hogy x és y legnagyobb közös osztója $(x, y) = d$. Ebből $x = dx_1$ és $y = dy_1$, ahol x_1 és y_1 relatív prím egész számok. Behelyettesítve az (1) egyenletbe:

$$d^3(7x_1^3 - 3y_1^3) = z^2. \tag{4}$$

Ebből következik, hogy d^3 a z^2-nek osztója, ami – felhasználva, hogy az egész számok prímtényezős felbontása egyértelmű – csak úgy lehet, ha d osztója z-nek, vagyis $z = dz_1$, ahol z_1 ugyancsak egész szám. Így

$$d(7x_1^3 - 3y_1^3) = z_1^2. \tag{5}$$

Legyenek most x_1 és y_1 tetszőleges relatív prím számok, és legyen $k = 7x_1^3 - 3y_1^3$. Legyenek $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_r$ a k prímtényezős felbontásában azok a prímszámok, melyek páratlan kitevőn szerepelnek, és jelöljük ezek szorzatát b-vel. Ekkor k/b prímtényezős felbontásában minden prímszám páros kitevőn szerepel, tehát ez négyzetszám, jelöljük a^2-tel. Ebből $k = a^2b$, ahol b úgynevezett négyzetmentes szám, tehát olyan szám, amely egyetlen 1-nél nagyobb szám négyzetével sem osztható. Ennek alapján (5) a

$$da^2b = z_1^2 \tag{6}$$

alakban írható. Mármost, mivel a^2 osztója z_1^2-nek, ezért a is osztója z_1-nek; $z_1 = az_2$, így (6)-ból azt kapjuk, hogy $db = z_2^2$. Ebből következik az is, hogy b osztója z_2^2-nek. Ez azonban – tekintetbe véve, hogy b négyzetmentes szám – csak úgy lehet, ha b a z_2-nek is osztója: $z_2 = bc$, azaz $db = b^2c^2$, végülis $d = bc^2$. Visszahelyettesítve: $x = x_1d = x_1bc^2$, $y = y_1d = y_1bc^2$ és $z = z_1d = az_2bc^2 = = abcbc^2 = ab^2c^3$.

Ezek szerint (1) összes egész megoldásait a következőképpen kaphatjuk. Választunk tetszés szerint két relatív prím egész számot: x_1, y_1-et; a $7x_1^3 - 3y_1^3$ számot $7x_1^3 - 3y_1^3 = a^2b$ alakba írjuk, ahol b négyzetmentes szám; ekkor a megoldás:

$$x = x_1bc^2, \qquad y = y_1bc^2, \qquad z = ab^2c^2.$$

Rögzített x_1, y_1 mellett a és b is adott, így az összes megoldások az x_1b, y_1b, ab^2 megoldásból származnak. Ha viszont különböző x_1, y_1 és x_2, y_2 relatív prím számpárból indulunk ki, akkor független megoldásokat kapunk. Ha ugyanis két megoldás ugyanabból az x_0, y_0, z_0 megoldásból származtatható, akkor az x- és y-értékek hányadosa mindkettőben x_0/y_0. Esetünkben viszont az x_1, y_1-ből kiindulva adódó (bármelyik) megoldásnál ez a hányados x_1/y_1 és hasonlóan az x_2, y_2-höz tartozóknál x_2/y_2, ezek pedig különbözők.

A továbbiakban a feladat általánosítását tűzzük ki célul. Karsai István és Vas Péter pályázatában ez már nem szerepel.

Az (1) egyenletben mind az együtthatók, mind a kitevők adott számok. Látni fogjuk, hogy az együtthatók helyébe bármilyen egész számokat írhatunk, a kitevőket azonban nem választhatjuk tetszőlegesen. Pl. az $x^3+y^3=z^3$ egyenletnek csak triviális megoldása létezik. Megmutatjuk, hogy (2)-nek az egész számok körében végtelen sok független megoldása van, ha $(k,\ n)=1$. Az eredeti definíciónak megfelelően az x_1, y_1, z_1 és az x_2, y_2, z_2 megoldásokat függetlennek nevezzük, ha nem létezik (2)-nek olyan x, y, z megoldása és olyan u, v egész szám, hogy $x_1=xu^n$, $y_1=yu^n$, $z_1=zu^k$ és $x_2=xv^n$, $y_2=yv^n$, $z_2=zv^k$ állna fenn. Itt is belátható, hogy a két megoldás független, ha $x_1/y_1\neq x_2/y_2$.

Először a $c=1$ esettel foglalkozunk, az általános esetet erre fogjuk visszavezetni. Fel fogjuk használni azt az ismert tételt, hogy ha $(k,\ n)=1$, akkor léteznek olyan u és v pozitív egész számok, melyekre

(7) $$ku+1=nv.$$

Legyen $x=ty$. Ekkor

(2′) $$ax^k+by^k=z^n\text{-ből}\qquad y^k(at^k+b)=z^n.$$

Rögzítsük t-t, és legyen $s=at^k+b$, továbbá $y=s^u$, $z=s^\nu$ ahol u és v olyan pozitív egész számok, melyekre (7) fennáll. Ekkor

$$ax^k+by^k=y^k(at^k+b)=y^ks=s^{uk}\cdot s=s^{ku+1}=s^{n\nu}=(s^\nu)^n=z^n,$$

azaz s^ut, s^u, s^ν megoldása (2')-nek. Különböző t-k esetén az így adódó megoldások függetlenek, ezért végtelen sok független megoldást kapunk.

A $c\neq 1$ esetben már az $x=x_1c$, $y=y_1c$, z_1 alakú megoldások között is van végtelen sok független. Ezekre ugyanis teljesül

$$ac^kx_1^k+bc^ky_1^k)=cz_1^n,\quad \text{vagyis}\quad (ac^{k-1})x_1^k+(bc^{k-1})y_1^k=z_1^n,$$

és az utóbbi egyenletnek az éppen belátottak szerint végtelen sok független x_1, y_1, z_1 megoldása van. Az ezekből képezett $x=cx_1$, $y=cy_1$, $z=z_1$ számhármas megoldása (2)-nek. Az így kapott megoldások függetlenek, mert $x/y=x_1/y_1$, s így független x_1, y_1, z_1 és x_1', y_1', z_1' megoldásokból (2)-nek is független x, y, z és x', y', z' megoldásai keletkeznek.

További általánosítás, ha az ismeretlenek száma is növekszik. Ezen belül csak a (3) alakú egyenletekkel foglalkozunk, ahol $(k,\ n)=1$. Itt már célszerű a függetlenség definícióját is megváltoztatni. Az eredeti definíció alapján (3)-nak nyilván végtelen sok független megoldása van. Ha ugyanis $x_3=x_4=\ldots=x_s=0$, akkor (3) helyébe $(2')$ lép, amelyről már tudjuk, hogy végtelen sok független megoldása van, és ezek nyilván (3)-nak is független megoldásai. Világos azonban, hogy ezek a (3)-nak nem „igazi" megoldásai.

A továbbiakban csak olyan megoldásokkal foglalkozunk, amelyekben egyik ismeretlen sem 0. Az $s=2$ esetben a függetlenség feltétele a megfelelő ismeretlenek arányának különbözősége volt, vagyis $x_1/y_1\neq x_2/y_2$, más alakban $x_1/x_2\neq y_1/y_2$. Ha most (3) két megoldása $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_s, z$ és $x_1',\ x_2',\ \ldots, x_s', z'$, akkor a megfelelő arányok:

(8) $$x_1'/x_1,\quad x_2'/x_2,\ \ldots,\quad x_s'/x_s.$$

Két megoldást akkor tekintve függetlennek, ha nem származtathatók le ugyanabból a megoldásból, a függetlenség feltétele az, hogy a (8) arányokból legalább kettő különbözzék. Sokkal erősebb megszorítást jelent azonban az, hogy a (8) arányok *mindegyike* különböző legyen.

Kimutatjuk, hogy ezen erősebb „függetlenség" mellett is létezik (3)-nak végtelen sok független megoldása az egész számok körében.

Válasszunk tetszőleges $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s$ egész számokat, és keressünk olyan p számot, melyre az $x_1=t_1p,\ x_2=t_2p,\ \ldots,\ x_s=t_sp$ alkalmas z mellett megoldást ad. Behelyettesítve:

$$p^k(a_1t_1^k+a_2t_2^k+\ldots+a_st_s^k)=z^n.$$

A zárójelen belüli kifejezést r-rel jelölve $p^kr=z^n$ adódik. Mivel feltettük, hogy $(k,\ n)=1$, azért rögzített, (7)-et kielégítő u és v pozitív egész számokra $p=r^u$ és $z=r^\nu$ választással $p^kr=r^{uk+1}=r^{\nu n}=z^n$. – Eszerint ha $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s$ tetszőleges egész számok, és $r=a_1t_1^k+a_2t_2^k+\ldots+a_st_s^k$, akkor az $x_1=t_1r^u,\ x_2=t_2r^u,\ \ldots,\ x_s=t_sr^u,\ z=r^\nu$ megoldását adja a (3) egyenletnek.

Ha most más $t_1',\ t_2',\ \ldots,\ t_s'$ egész számokat választunk, és $r'=a_1t_1'^k+a_2t_2'^k+\ldots+a_st_s'^k$, akkor az $x_1'=t_1'(r')^u$, $x_2'=t_2'(r')^u,\ \ldots,\ x_s'=t_s'(r')^u$, $z'=(r')^\nu$ ismét a (3) megoldása lesz, és a (8) törtekre:

$$\frac{x_1'}{x_1}=\frac{t_1'}{t_1}\cdot\left(\frac{r'}{r}\right)^u,\qquad \frac{x_2'}{x_2}=\frac{t_2'}{t_2}\cdot\left(\frac{r'}{r}\right)^u,\qquad \ldots,\qquad \frac{x_s'}{x_s}=\frac{t_s'}{t_s}\cdot\left(\frac{r'}{r}\right)^u.$$

Itt minden hányadosban fellép $(r'/r)^u$, ami független az ismeretlen indexétől. Ezért a (8) hányadosok közt nincs két egyenlő, ha a

$$t_1'/t_1, \qquad t_2'/t_2, \qquad \ldots, \qquad t_s'/t_s$$

hányadosok mind különbözőek; ezt pedig könnyen el tudjuk érni, például úgy, hogy $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s$ számoknak mindig más prímszám 1-ső, 2-ik, $\ldots$, s-ik hatványát választjuk.

Fried Ervin