

1. feladat. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezést:

$$(*) \quad [(a-c)^2 + (b-d)^2] \cdot (a^2 + b^2) - (ad - bc)^2.$$

Megoldás. Jelöljük az átalakítandó kifejezést K -val. A kéttagúak négyzeteit tagokra bontva és részben beszorozva:

$$\begin{aligned} K &= [a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ac + bd)](a^2 + b^2) - a^2d^2 - b^2c^2 + 2abcd = \\ &= (a^2 + b^2)^2 + (c^2 + d^2)(a^2 + b^2) - 2(ac + bd)(a^2 + b^2) - \\ &\quad - a^2d^2 - b^2c^2 + 1abcd. \end{aligned}$$

A második szorzatot tagokra bontva összevonások után a szorzatból két tag marad, amelyek az utolsó taggal együtt teljes négyzetet alkotnak: $a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd = (ac + bd)^2$. Így K is teljes négyzet:

$$K = (a^2 + b^2)^2 + (ad + bc)^2 - 2(ac + bd)(a^2 + b^2) = [a^2 + b^2 - (ad + bc)]^2.$$

Ezzel K -t két (egyenlő) tényező szorzatává alakítottuk.

2. feladat. Legyen az N szám nagyobb, mint a jegyeinek fordított sorrendben való leírásával keletkező F szám. Bizonyítandó, hogy

$$(1) \quad \sqrt{N} < N - F.$$

Megoldás. Ha az N számban a számjegyek száma páros, akkor a feladat állítására találhatók ellenpéldák, pl.

$$\sqrt{87} > 87 - 78 = 9, \quad \sqrt{8108} > 8108 - 8018 = 90.$$

Páratlan számú számjeggyel írt N számokra viszont az állítás igaz, először ezt bizonyítjuk be; majd a páros esetben meghatározzuk azokat a számokat, amelyekre az állítás nem érvényes.¹

I. Legyen N jegyeinek száma $2k + 1$. Ekkor N kisebb a legkisebb $2k + 2$ jegyű számnál, ami 10^{2k+1} ezért

$$(2) \quad \sqrt{N} < \sqrt{10^{2k+1}} = 10^k \cdot \sqrt{10} < 4 \cdot 10^k.$$

Megmutatjuk, hogy $N - F$ semmilyen megengedett N -re nem kisebb a négyzetgyökre itt talált felső korlátnál.

Az N szám balról számított $k + 1$ -edik számjegyének jobbról számított sorszáma is $k + 1$, így ennek a jegynek a helyi értéke F -ben ugyanannyi lesz, mint volt N -ben, ti. 10^k . Jelöljük ezt a számjegyet j -vel, az N -ben az első k számú jeggyel, illetőleg az utolsó k számú jeggyel írt számot pedig N_1 -gyel, illetőleg N_2 -vel. N_1 utolsó számjegyének helyi értéke az N -ben 10^{k+1} , ezért

$$N = N_1 \cdot 10^{k+1} + j \cdot 10^k + N_2.$$

(N_1 valódi k -jegyű szám, vagyis balról első számjegye nem kisebb 1-nél, N_2 azonban kezdődhet helypótló 0-val is.) Legyen az N_1 , N_2 szám jegyeinek fordított sorrendben való írásával előálló k -jegyű szám F_1 , illetőleg F_2 (mindkettő kezdődhet helypótló 0-val), így

$$\begin{aligned} F &= F_2 \cdot 10^{k+1} + j \cdot 10^k + F_1, \text{ tehát} \\ (3) \quad N - F &= (N_1 - F_2) \cdot 10^{k+1} - (F_1 - N_2) \end{aligned}$$

N_1 és F_2 különbözők, mert különben N számjegysorozata szimmetrikus volna j -re, s ezért $N = F$ állna. Így $N > F$ miatt $N_1 - F_2 \geq 1$. Másrészt a kivonandó nem nagyobb a k számú 9-essel írott számnál, $10^k - 1$ -nél, így (2)-t is tekintetbe véve

$$N - F > 1 \cdot 10^{k+1} - 10^k = 9 \cdot 10^k > 4 \cdot 10^k > \sqrt{N}.$$

Ezzel a feladat állítását a páratlan számú jeggyel írt természetes számokra bebizonyítottuk.

II. Ha N számjegyeinek száma $2k$, akkor $N < 10^{2k}$, és így

$$(4) \quad \sqrt{N} < 10^k.$$

Ebben az esetben a fenti jelöléseket tovább használva

$$\begin{aligned} N &= N_1 \cdot 10^k + N_2, & F &= F_2 \cdot 10^k + F_1, \\ N - F &= (N_1 - F_2) \cdot 10^k - (F_1 - N_2), \end{aligned}$$

¹ Mint a versenyről kiadott jelentés közölte – lásd K. M. L. (31) 1965. 3. o. – a feladat szövegéből sajnálatosan kimaradt az a megszorítás, hogy az állítás páratlan számú számjeggyel írt természetes számokra bizonyítandó. – Szerk.

és $N - F > 0$ miatt ismét szükségképpen $N_1 > F_2$. Továbbá a második zárójelbeli különbség most is kisebb 10^k -nál. Ezért

$$N - F > (N_1 - F_2) \cdot 10^k - 10^k,$$

és így $N_1 - F_2 \geq 2$ esetén $N - F$ nagyobb a (4)-beli felső korlátnál, tehát az (1)-et nem teljesítő számban csak $N_1 - F_2 = 1$ lehet, azaz $N_1 = F_2 + 1$. Ha F_2 9-esre végződik, akkor N_1 0-ra, így F_1 első jegye 0, N_2 -é 9, tehát ekkor is

$$N - F = 10^k + (N_2 - F_1) > 10^k.$$

Így csak az lehetséges, hogy F_2 utolsó – s így N_2 első – jegye 1-gyel kisebb, mint N_1 utolsó, tehát F_1 első jegye, a többi jegyek N_1 -ben és F_2 -ben, tehát F_1 -ben és N_2 -ben is megegyeznek. Ekkor $F_1 - N_2 = 10^{k-1}$,

$$N - F = 10^k - 10^{k-1} = 9 \cdot 10^{k-1}.$$

Ezek szerint csak akkor állhat fenn (1) helyett $\sqrt{N} \geq N - F$, ha (négyzetre emelve)

$$(6) \quad N > (N - F)^2 = 81 \cdot 10^{2k-2} = 8,1 \cdot 10^{2k-1}.$$

Megállapításainkat összefoglalva $2k = 2$ esetén (6) így alakul: $N \geq 81$, vagyis első jegye 8 vagy 9, második jegye pedig a fentiek szerint 1-gyel kisebb; tehát 2 kétjegyű ellenpélda van: 87 és 98.

$2k \geq 4$ esetén a $2k$ -jegyű N szám akkor nem teljesíti (1)-et, ha középső két jegyével írt szám a

$$10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$$

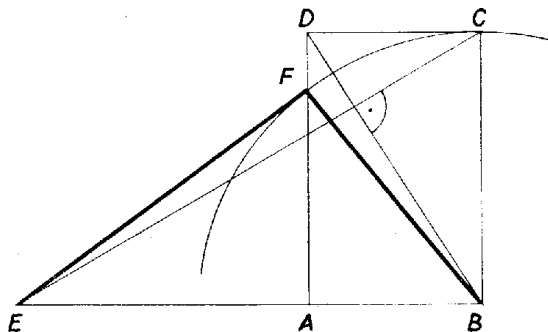
számok valamelyike, az ezt megelőző $k - 1$ jegyű szám első két jegyével írt szám a

$$81, 82, \dots, 89, 90, 91, \dots, 99$$

számok valamelyike, további $k - 3$ számjegye ($k \geq 4$ esetén) tetszés szerinti, végül utolsó $k - 1$ jegye fordított sorrendben rendre egyenlő az első $k - 1$ jegyével.

$2k = 4$ esetén a második számjegyre mindkét feltételnek teljesülnie kell, ezért az első két számjegye nem lehet 90, a 4-jegyű ellenpéldák száma 18. Hatjegyű ellenpélda $19 \cdot 9 = 171$ van, $k \geq 3$ esetén a $2k$ jegyű ellenpéldák száma $19 \cdot 10^{k-3} \cdot 9 = 171 \cdot 10^{k-3}$.

3. feladat. Az $ABCD$ téglalap két rövidebb oldala AB és CD . Messe a C pontból a BD átlóra bocsátott merőleges egyenes az AB oldal meghosszabbítását az E pontban. Messe továbbá a B középpontú, BC sugarú kör a téglalap AD oldalát az F pontban. Bizonyítandó, hogy EF merőleges FB -re.



Megoldás. A CEB és DBC háromszögek hasonlóak, mert oldalaik páronként merőlegesek egymásra, ezért

$$EB = \frac{BC}{CD} \cdot CB.$$

Így EBF és FBA is hasonló háromszögek, mert B -nél levő szögük közös, és az ezt bezáró oldalak aránya az F -et előállító szerkesztés miatt egyenlő:

$$\frac{EB}{BF} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{CB}{BF} = \frac{BC}{CD} = \frac{FB}{BA}.$$

Az FBA háromszög A csúcsánál derékszög van, ezért a megfelelő BFE szög is derékszög. Ezt kellett bizonyítanunk. *Megjegyzés.* A versenyzők egy része kifejezte FA -t, EA -t, majd EF -et is a téglalap oldalaival, és az

$$EB^2 = EF^2 + FB^2$$

összefüggésre jutott. Ebből a feladat állítása a Pythagoras-tétel megfordítása alapján következik.