

Az 1965. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulójának 2. feladata így szólt:

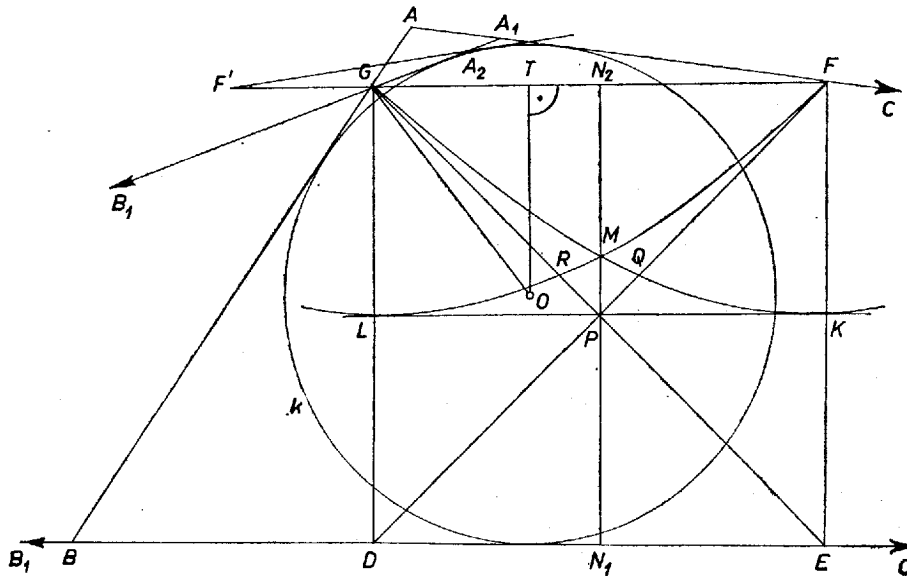
A hegyesszögű háromszögbe négyzetet írunk, amelynek két csúcsa az egyik oldalon, egy-egy csúcsa a további oldalakon van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet tartalmazza a háromszög beírt körének középpontját.

A közölt megoldások¹ szerint a négyzet e pontot mindig belsejében tartalmazza, továbbá elég a négyzet és a háromszög közös oldalegyenesén fekvő csúcsokról kikötni, hogy hegyesszögűek legyenek.

Pelikán József versenydolgozatában felvetette azt a kérdést, hogy rögzítve a négyzetet és minden lehetséges módon köréírva hegyesszögű háromszögeket, ezek beírt körének középpontjai kerülhetnek-e a négyzet oldalaihoz tetszés szerint közel, vagy van olyan $\lambda > 0$, hogy ha a négyzet oldala t , akkor a körülírt háromszögek beírt körének középpontjai mindig legalább λt távolságra esnek a négyzet oldalaitól. Az alábbiakban meghatározzuk azon pontok mértani helyét a négyzetben, amelyek beírt körközpontok lehetnek, és látni fogjuk, hogy ezek nem kerülhetnek tetszés szerint közel az oldalakhoz.

Legyen $DEFG$ a négyzet, ABC egy körülírt háromszöge, legyenek a B, D, E, C pontok ebben a sorrendben egy egyenesen, s legyen F , ill. G az AC , ill. AB szakaszon. Legyen az ABC háromszög beírt köre k , középpontja O .

I. Egyelőre nem kötjük ki, hogy a BAC szög hegyesszög legyen.



a) A k körnek metszenie kell az FG szakaszt; különben ugyanis átmérője legfeljebb DE lenne, ezért az EF, GD szakaszok közül legalább az egyiket, mondjuk EF -et nem metszené, s így teljes egészében az EFG szögtartományban volna, s így nem érinthetné az AC egyenest. Legyen EF és GD felezőpontja K , ill. L , akkor ezek szerint O a $KLGF$ téglalapba esik.

k nem tartalmazhatja belsejében a G pontot, mert G -ből érintő vonható hozzá. Így O legalább annyira van G -től, mint a DE egyenestől, tehát alatta van a G fókuszú, DE vezéregyenesű parabolának. Hasonlóan O az F fókuszú, DE vezéregyenesű parabolának is alatta van, legyen e két parabola metszéspontja M . Ekkor O az (egy egyenes szakasz és két parabolaív által határolt) KLM idomba esik; a KL szakasz pontjai nem tartoznak hozzá e mértani helyhez.

b) Ennek a tartománynak minden pontja lehet körközpont. Valóban, legyen O ezen idom valamely pontja. Az O körül írt, DE -t érintő k kör nem tartalmazza F -et és G -t és metszi FG -t, így az F -ből, ill. G -ből k -hoz húzott, a négyzetet nem metsző érintők és DE egy olyan háromszöget határolnak, melynek a DE egyenesen levő csúcsaiban hegyesszögei vannak és melynek a k kör beírt köre, $DEFG$ beírt négyzete.

II. Kössük ki most még, hogy A -nál is hegyesszög van.

a) Az I.a) alatti megállapítások természetesen érvényben maradnak. Jelöljük $DEFG$ átlóinak metszéspontját P -vel. Megmutatjuk, hogy ekkor O csak a PFG háromszög belsejében lehet! Ebből következik, hogy ha az F fókuszú parabolának és a DF átlónak a négyzetbe eső metszéspontját Q -val, a G fókuszú paraboláét és EG -ét R -rel jelöljük, O a (két egyenesszakasz és két parabolaív által határolt) $PQMR$ idomba esik; a PQ, PR szakaszok pontjai nem tartoznak a mértani helyhez. Annak bizonyítását, hogy ezen idom minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez, az olvasóra bizzuk.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy k középpontja pl. a PDG háromszögbe esik. Ekkor k nem metszi az EF egyenest, és ezért a CA oldalt az FA szakaszon érinti. A G pontból két érintőt húzhatunk k -hoz; az ezek által lemetszett háromszögek legyenek ABC és A_1B_1C . Feltehetjük, hogy a jelölést úgy választottuk, hogy k az A_1G, GB szakaszokat érinti. Be fogjuk látni, hogy a B_1A_1C és BAC szögek tompaszögek. A B_1A_1C szög a GAA_1 háromszög külső szöge, s így nagyobb a BAC szögnél.

¹Lásd *Surányi János*: Az 1965. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása, K.M.L. 31 (1965) 104–112. o., szorosabban 106–110. o.

Nyilvánvalóan $BGO\triangleleft = A_1GO\triangleleft$. Továbbá $DGO\triangleleft \leq OGF\triangleleft$, ezért $BGD\triangleleft \geq FGA_1\triangleleft$. Legyen O vetülete FG -re T , és F tükörképe T -re F' , ez O elhelyezkedése miatt a négyzet oldalának meghosszabbításán fekszik. Messe az FA érintő OT -re vett tükörképe GA_1 -et A_2 -ben, akkor az FGA_1 szög a $GF'A_2$ háromszög külső szöge, és így $GF'A_2\triangleleft < FGA_1\triangleleft$. Továbbá nyilvánvalóan $GF'A_2\triangleleft = GFA\triangleleft$. Ezek szerint

$$GFA\triangleleft < FGA_1\triangleleft \leq BGD\triangleleft, \text{ s}$$

$$GAF\triangleleft = 180^\circ - AGF\triangleleft - GFA\triangleleft = 90^\circ + BGD\triangleleft - GFA\triangleleft > 90^\circ$$

és még inkább $GA_1F\triangleleft > 90^\circ$.

Ezzel ellentmondásra jutottunk azzal a feltevésünkkel, hogy az ABC háromszög hegyesszögű. Tehát O a PGF háromszög belsejébe esik, és így a mértani hely valóban a $PQMR$ idom belseje, hozzávéve a QM , MR parabolaívket.

Ennek az idomnak a négyzet kerületéhez legközelebb eső pontja M , hiszen a négyzetet P -ből, mint középpontból úgy kicsinyítve, hogy M a kerületére essék, nyilván tartalmazni fogja a $PQMR$ idomot. Legyen DE és FG felezőpontja N_1 , ill. N_2 , a négyzet oldala t , akkor M nyilván az N_1N_2 egyenesre esik,

$$MN_1 = t - MN_2, \quad \text{és} \quad MN_1 = MF = \sqrt{MN_2^2 + \frac{t^2}{4}},$$

azaz $MN_2 = 3t/8$. Tehát *Pelikán* kérdésére a válasz az, hogy a beírt körök középpontjai nem kerülhetnek $3t/8$ -nál közelebb a négyzet kerületéhez, és ez a korlát nem javítható.

Egyébként az is látható, hogy A -nál tompaszöget is megengedve a beírt kör középpontja tetszés szerinti közel eshet a négyzet kerületéhez.

Lovász László