

A 469. fizika feladat közölt megoldásában (K. M. L. XXX. 3. szám, 138. lap) az eredmény helyes, de a megokolás helytelen. Példa ez arra, hogy az intuícióval meglátott végeredmény alátámasztása helytelen lehet. A megoldó ugyanis abból indul ki, hogy feltételezi, miszerint az egyik alátámasztási pont már eljutott a súlypont alá, de a másik még nem. Ez a feltételezés azonban bizonyításra szorul; annál is inkább, mert a közölt feltételek mellett nem is igaz. A pontos meggondolás ugyanis éppen azt mutatja, hogy mindkét alátámasztási pont egyenletesen és felváltva tart a súlypont, mint határérték felé és egyikről sem mondható, hogy előbb jutott alá. Ezt a következőkben tömören igazoljuk.

Legyen a pálca súlya Q , az 1. ék távolsága a súlyponttól a és a 2. éké b . Ekkor – mint ismeretes – az ékekre ható súlymegoszlás

$$Q_1 = \frac{b}{a+b} Q, \quad Q_2 = \frac{a}{a+b} Q.$$

vagyis $a = \frac{Q_2}{Q_1} b$.

Az ékek és a pálca között súrlódó erő lép fel, éspedig kétféle: nyugalmi, *tapadási* (S_t), ha az éken nem mozog a pálca (súrlódási együtthatója μ_0), és mozgási (S_m) μ együtthatóval. Tapasztalat szerint $\mu_0 > \mu$, s ez döntő a továbbiakban. A feladat éppen ennek a kétféle súrlódásnak a szerepére példa.

Az ékek megindulásakor legyen $a < b$ és így $Q_1 > Q_2$.

Ezért

$$S_{1t} = \mu_0 \cdot Q_1 > \mu Q_2 = S_{2t}.$$

Az ékek megmozdulásakor tehát a 2. ék indul el a pálca alatt, míg az 1. ék a pálcával együtt mozog. A mozgás folytán előáll, hogy S_{2t} lecsökken $S_{2m} = \mu Q_2$ -re.

A pálcának 2. feletti csúszása addig tart, míg a b távolság annyira rövidül, hogy $S'_{1t} = S'_{2m}$ lesz. Ez bekövetkezik b_1 -nél amikor is

$$S'_{1t} = \mu_0 \frac{b_1}{a+b_1} Q = \mu \frac{a}{a+b_1} Q = S'_{2m},$$

vagyis $b_1 = \frac{\mu}{\mu_0} a$, azaz $\mu_0 > \mu$ folytán $b_1 < a$.

Ebben a pillanatban a pálcára nem hat erő, tehát megáll. Ekkor azonban S'_{2m} a nagyobb S'_{2t} értékre változik, s így $S'_{1t} < S'_{2t}$ lesz. Most tehát az 1. ék fölött csúszik meg a pálca, aminek következményeként S'_{1t} a kisebb S'_{1m} értékre ugrik.

Ez a mozgás addig tart, amíg a_1 -nél $S''_{1m} = S''_{2t}$, vagyis

$$\mu \frac{b_1}{a_1+b_1} Q = \mu_0 \frac{a_1}{a_1+b_1} Q,$$

amiből $a_1 = \frac{\mu}{\mu_0} b_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 a$ és nyilván $a_1 < b_1$.

A pálca ismét megáll és S''_{1m} átugrik a nagyobb S''_{1t} értékre s így $S''_{1t} > S''_{2m} = S''_{2t}$ miatt ismét 2. fölött történik a csúszás, s lesz egyszerre S''_{2t} -ből a kisebb S''_{2m} . A mozgás most b_2 -ig tart, melyre $S'_{1t} = S''_{2m}$, vagyis

$$\mu_0 \frac{b_2}{a_1+b_2} Q = \mu \frac{a_1}{a_1+b_2} Q,$$

amiből

$$b_2 = \frac{\mu}{\mu_0} a_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^3 a.$$

Így folytatódik a két ék felett a csúszás mindig felváltva. Az alátámasztási pontok súlyponttól való távolságának sorozata tehát

$$\begin{aligned} b > a > b_1 = \frac{\mu}{\mu_0} a > a_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 a > b_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^3 a > a_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^4 a > \dots, > \\ > b_n = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{2n-1} a > a_n = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{2n} a > \dots \end{aligned}$$

$$\text{Az 1. ék esetén: } a; a_1 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 a; a_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^4 a; \dots a_n = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{2n} a; \dots,$$

$$\text{és a 2. ék esetén: } b; b_1 = \frac{\mu}{\mu_0} a; b_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^3 a; \dots b_n = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{2n-1} a; \dots$$

Mindkét sorozat végtelen geometriai haladvány, melynek hányadosa $\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2$, tehát mindkettő határértéke 0. A két alátámasztási pont tehát egyenletesen váltakozva tart a súlypont felé és alatta találkozik, de egyik sem ér előbb oda. A közölt megoldás feltételezése tehát hibás.

Azt hiszem, a fönti gondolatmenet arra is választ ad, miért kellett a feladatban feltételezni a pálca egyenletesen érdes felületű egyenes voltát.

Dózsa Márton

(Azok részére, aki a XXX. kötetet nem olvasták, itt közöljük újból a tanulságos feladat szövegét:

469. Támasszuk alá egy egész hosszában egyenletesen érdes felületű egyenes pálcát két tetszőleges pontjában. (Gyakorlatban vehetünk egy sétapálcát vagy vonalzót, és mutatóujjunkkal támasszuk alá.) Kérdés: a pálca melyik pontja alatt találkozik a két ék, ha azonos abszolút értékű állandó sebességgel mozognak egymás felé?

Közli: Dózsa Márton