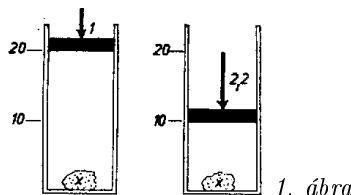


Az I. forduló feladatai:

1. 20 cm^3 térfogatú orvosi fecskendőbe 1 atmoszférás nyomású levegőt zárunk. A fecskendőbe előzőleg porózus anyagot helyezünk. Mekkora a porózus anyag térfogata, ha a dugattyút a 10 cm^3 -es jelig benyomva a belső nyomás 2,2 atmoszférára emelkedik?



1. ábra

Megoldás. Boyle-Mariotte törvényét alkalmazzuk, mert a hőmérséklet állandó marad. (1. ábra). Ha a porózus anyag térfogata $x \text{ cm}^3$, akkor az első állapotban 1 atmoszférás nyomás mellett a levegő térfogata $(20 - x) \text{ cm}^3$. A végállapotban a nyomás 2,2 atmoszférára, és az ugyanakkora tömegű levegőnek a térfogata $(10 - x) \text{ cm}^3$. A nyomás és térfogat szorzata állandó:

$$1 \cdot (20 - x) = 2,2 \cdot (10 - x).$$

Ebből az egyenletből a porózus anyag térfogatára kapjuk:

$$x = 1,67 \text{ cm}^3.$$

Az eljárás elvben arra alkalmas, hogy porózus anyagok (szivacs, homok) anyagának valódi térfogatát meghatározzuk. Az eljárás pontossága nem nagy.

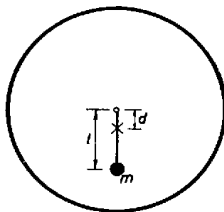
2.

- a kereket tengelyén teljesen kiegyensúlyozza (a kerék a tengelyen minden helyzetben egyensúlyban marad),
- a kerék küllőjére a forgásponttól l távolságra m tömegű, pontszerűnek tekinthető ólomnehezéket erősít,
- a kereket lengésbe hozza és megméri a T lengésidejt.

Megkaphatja-e ezekből az adatokból a keresett tehetetlenségi nyomatékot? Mekkora ez, ha $m = 0,5 \text{ kg}$, $l = 0,2 \text{ m}$ és $T = 1,2 \text{ sec}$? Valaki kerékpárja első kerekének tehetetlenségi nyomatékát úgy akarja meghatározni, hogy

- a kereket tengelyén teljesen kiegyensúlyozza (a kerék a tengelyen minden helyzetben egyensúlyban marad),
- a kerék küllőjére a forgásponttól l távolságra m tömegű, pontszerűnek tekinthető ólomnehezéket erősít,
- a kereket lengésbe hozza és megméri a T lengésidejt.

Megkaphatja-e ezekből az adatokból a keresett tehetetlenségi nyomatékot? Mekkora ez, ha $m = 0,5 \text{ kg}$, $l = 0,2 \text{ m}$ és $T = 1,2 \text{ sec}$?



2. ábra

Megoldás. A kerék tömege eredetileg M , tehetetlenségi nyomatéka I . Ha ráerősítjük l távolságban az m tömeget, az együttes tömeg $M + m$, az együttes tehetetlenségi nyomaték $I + ml^2$, és a súlypontnak a tengelytől mért távolsága d lesz (2. ábra). Az ilyen módon létrejött fizikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + ml^2}{(M + m)gd}}.$$

Ki kell számítanunk a d súlyponttávolságot. Az erre szolgáló aránypár:

$$d : (l - d) = m : M,$$

innen:

$$d = \frac{m}{M + m} \cdot l.$$

Behelyettesítve ezt a lengésidejő képletébe, $M + m$ kiesik és kapjuk:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + ml^2}{mgl}}.$$

Tehát a kerék tömegének ismerete nélkül kapjuk meg a tehetetlenségi nyomatékot; eredményünket rendezve:

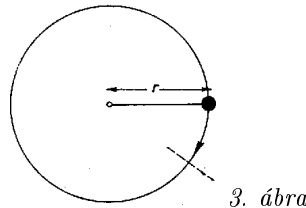
$$I = mgl \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 - ml^2.$$

A megadott számadatokkal a kerék eredeti tehetetlenségi nyomatéka:

$$I = 157\,700 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2 = 0,01577 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

3. 1 cm sugarú gömböt 900 V feszültségre töltünk fel. A gömböt 30 cm hosszú szigetelő nyélre helyezve 18000/perc fordulatszámmal megforgatjuk. Mekkora mágneses térerő észlelhető a forgástengely helyén? (A forgó kis gömböt a mágneses tér meghatározásához tekintjük pontszerű töltésnek.) A körvezető középpontjában a mágneses térerősség $H = \frac{I}{2r} \left(\frac{\text{A}}{\text{m}} \right)$.

Megoldás. Először meg kell határoznunk, mennyi a kis gömbben levő töltés. A gömb kapacitása arányos rádiuszával; ha R rádiuszt cm-ben, C kapacitást faradban mérjük, akkor $C = R/9 \cdot 10^{11}$. Tehát az 1 cm-es gömb kapacitása $C = 1,11 \cdot 10^{-12}$ farad = 1,11 pF. A gömb töltése $Q = CU$ alapján $Q = 1,11 \cdot 10^{-12} \cdot 900 = 10^{-9}$ coulomb = 1nC.

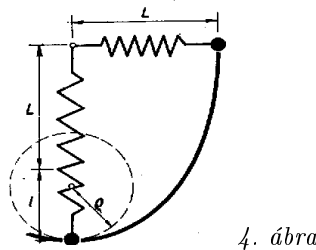


A kör mentén körül vitt töltés köráramot jelent (3. ábra). A percenként 18 000-es fordulatszám 1 másodperc alatt 300 fordulat, tehát a körpálya valamely pontján az 1 nC 1 másodperc alatt 300-szor halad át és így a mozgatott töltés mágneses hatása olyan, mint az $I = 300 \cdot 1 \cdot 10^{-9} = 3 \cdot 10^{-7}$ amper = 0,3 μA erősségű elektromos áramé.

A köráram középpontjában jelentkező mágneses térerősségre megadott képlet szerint $H = 3 \cdot 10^{-7} / 2 \cdot 0,3 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ A/m}$. (Ha a mágneses térerősséget a $0,2\pi I/r$ képlettel számítjuk ki, akkor $H = 0,2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-7} / 30 = 6,28 \cdot 10^{-9}$ oersted.)

A II. forduló feladatai

1. Felfüggesztett L hosszúságú rugóra olyan kisméretű testet akasztunk, amely a rugót eredeti hosszának c -szeresével nyújtja meg ($l = cL$). A rugót a testtel együtt vízszintes helyzetbe hozzuk (a rugó ekkor nyújtatlan állapotban van, hossza L), és innen elengedjük. Mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test éppen a felfüggesztési pont alatt halad át?



Megoldás. Az eredetileg L hosszúságú rugó l megnyúlása arányos az L eredeti hosszal és a P nyújtó erővel: $l = eLP$; a feladat szövegében szereplő állandó $c = eP$. Az l megnyúlást okozó erő $P = l/eL$. Az induláskor L hosszúságú rugó hossza a felfüggesztési pont alatt való áthaladáskor $L + l$, ezalatt az m nagyságú tömegnél a nehézségi erő munkavégzése $mg(L + l)$, (4. ábra).

Ha a felfüggesztési pont alatt v sebességgel halad át a tömeg, akkor mozgási energiája $mv^2/2$. A megnyúlt rugóban rugalmas energia van elraktározva. A nyújtáshoz szükséges munkavégzés L úton történt 0-ról l/eL -re lineárisan növekvő erővel szemben, ezért középértékben az erő felét véve számításba a rugó nyújtásához szükséges munkavégzés:

$$\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{eL} = \frac{l^2}{2eL}.$$

A mechanikai energiamegmaradás törvénye szerint a nehézségi erő munkája egyenlő a megszerzett mozgási energia és a rugalmas erővel szemben végzett munka összegével:

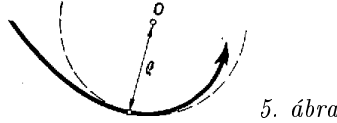
$$mg(L + l) = \frac{mv^2}{2} + \frac{l^2}{2eL}.$$

Ebben az egyenletben l és v az ismeretlenek.

Amikor a mozgó tömeg függőlegesen a felfüggesztési pont alatt van (és vízszintes irányban halad), akkor a rugó ereje szolgáltatja az mg súly ellenerejét és a centripetális erőt:

$$\frac{l}{eL} = mg + \frac{mv^2}{\varrho}.$$

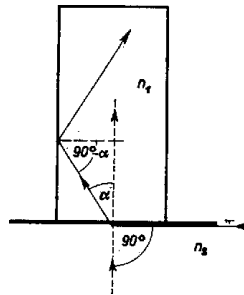
Itt ϱ a pálya görbületi sugara. Tehát ebben az egyenletben három ismeretlen van: l , v és ϱ .



5. ábra

Ha egy tömeg görbe pályán mozog, akkor az centripetális erő mv^2/ϱ . ϱ a görbületi sugár, azon kör rádiusza, amely az illető helyen legpontosabban simul a görbéhez (5. ábra). (A görbületi kör fogalma megtalálható például a Középiskolai Matematikai Lapok 1964. évi 3. számában a 129. oldalon kezdődő cikkben.) Feladatunkban a kérdézet pontban ismeretlen a görbületi sugár értéke, ezért a feladatot nem tudjuk megoldani. Az a gondolat, hogy a kérdézet pontban a görbületi sugár $L+l$ volna, minden alapot nélkülöz. Nagyon is kérdéses, hogy a görbületi középpont egyáltalán benn van-e a felfüggesztési ponton átmenő függőlegesben, amikor a tömeg ezen áthalad, vagyis, hogy a tömeg vízszintesen halad-e át a felfüggesztési pont alatt. Adott numerikus értékek mellett, hosszadalmas számítási eljárásokkal a tömeg pályája bizonyos közelítéssel megállapítható.

2. A száloptikás orvosi tükör (endoszkóp) optikai modellje adott n_1 törésmutatójú szál, amelyet oldalról n_2 törésmutatójú anyag vesz körül. A szál vége síklap, amely n_3 , törésmutatójú közeggel érintkezik. (A törésmutatók levegőre vonatkoznak.) Hogyan kell n_1 értékét megválasztanunk ahhoz, hogy a szálon keresztül a véglap alatti teljes félteret láthassuk, ha a) $n_2 = n_3 = 1$, b) $n_2 = 1$ és $n_3 = 4/3$?



6. ábra

Megoldás. Vegyük figyelembe azt a határesetet, amikor a fénysugár az n_3 törésmutatójú anyagból sűrűlődvá érkezik a határfelületre és az $n_1 - n_2$ határfelületet a teljes visszaverődés határszöge alatt érinti (6. ábra). α az n_1 törésmutatójú közegbe belépő sugár irányát jelzi. Az $n_3 - n_1$ határfelületen:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \alpha} = \frac{n_1}{n_3};$$

a teljes visszaverődés határesetének feltétele az $n_1 - n_2$ határfelületen:

$$\frac{1}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Mivel $\sin 90^\circ = 1$ és $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, ezért $\sin \alpha = n_3/n_1$ és $\cos \alpha = n_2/n_1$. α kiküszöbölése leggyorsabban a négyzetek összegezésével történik:

$$\left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

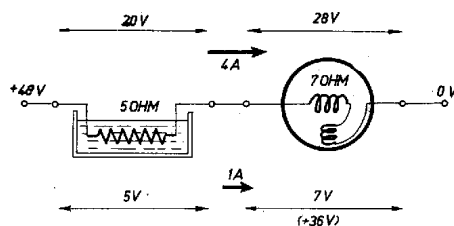
Rendezéssel: $n_1^2 = n_2^2 + n_3^2$, illetve $n_1 = \sqrt{n_2^2 + n_3^2}$. Ez n_1 azon értékét adja meg, amely mellett a fénysugár mindkét határfelületet a teljes visszaverődés feltételével érinti. Ha n_1 értéke nagyobb, a fénysugár behatolása a szálba és a szálban maradása még bizonyosabb. Tehát a válasz úgy szól, hogy n_1 törésmutatójának nem szabad kisebbnek lennie, mint a másik két törésmutató négyzetösszegének négyzetgyöke. Az eredmény n_2 és n_3 tekintetében szimmetrikus, e két anyag felcserélhető. Száloptikáról lévén szó, meg kell említeni, hogy az n_3 -as közegből a szálba behatoló sugárnyaláb szálban maradása egyáltalán nem jelenti azt, hogy képpalkotás is történik, vagyis, hogy a berendezés használható. Lényegében

ugyanaz a jelenség szerepel abban a közismert kísérletben, hogy egy üvegekocka oldaláról nem látható az üvegekocka alatt levő tárgy (az 1936. évi Eötvös verseny 3. feladata).

A feladatban kért a) esetben $n_1 = \sqrt{2}$, b) esetben $n_1 = 5/3$.

3. 48 voltos generátor áramkörébe sorba kapcsolunk egy motort és egy kaloriméterbe helyezett 5 ohm ellenállású vezetőt. A generátor és az egyéb kapcsoló huzalok ellenállása elhanyagolható. Ha a motor forgásban van, a kaloriméterben 72 cal, ha pedig a motort akadályozzuk a forgásában, 1152 cal hő keletkezik percenként. Mekkora forgás közben az indukált ellenelektromotoros erő és a motor kapocsfeszültsége?

Megoldás. Az áram hőhatásának $Q = 0,24I^2Rt$ törvénye alapján azonnal kiderül, hogy ha a motor áll ($Q = 1152$ cal, $R = 5$ ohm, $t = 60$ sec), az áramerősség 4 amper, ha a motor forog ($Q = 72$ cal, $R = 5$ ohm, $t = 60$ sec), az áramerősség 1 amper.



7. ábra

Először tárgyaljuk a forgásában megakadályozott motor esetét (7. ábra, a felső számok). Ha az áramerősség 4 amper, akkor a kaloriméterben levő 5 ohmra $4 \cdot 5 = 20$ volt feszültségesés jut. Az áramforrás változatlan 48 voltos elektromotoros erejéből a motorra $48 - 20 = 28$ volt jut. Minthogy a motoron is átfolyik 4 amper, a motor tekercselésének ohmos ellenállása $28 : 4 = 7$ ohm értékű.

Most vizsgáljuk a forgásban levő motort (7. ábra, az alsó számok). 1 amperes áramerősség mellett a kaloriméterben levő 5 ohmra $1 \cdot 5 = 5$ volt jut. A motortekercselések 7 ohmjára most $1 \cdot 7 = 7$ voltnak kell jutnia. Marad az áramforrás 48 voltjából $48 - 5 - 7 = 36$ volt. Ekkora a forgáskor indukció által keltett ellenelektromotoros erő. A motor kivezetéseire eső kapocsfeszültség $36 + 7 = 43$ volt, vagy $48 - 5 = 43$ volt. Az ellenelektromotoros erővel szemben végzett munka alakul mechanikai munkává, így motorunk mechanikai teljesítménye $36 \cdot 1 = 36$ watt, amely üresen járó motornál csapágy súrlódás, közegellenállás leküzdésére fordítódik. A motor által felvett teljesítmény $43 \cdot 1 = 43$ watt, így a hatásfok $36/43 = 0,84 = 84\%$.

Általánosságban és kaloriméter nélkül tárgyalva, ha a motor tekercselése R ohm ellenállású, U_0 elektromotoros erejű feszültségforrásra van kapcsolva és állva I_a , forogva I_f az áramerősség, akkor a motor ohmos ellenállása U_0/I_a lévén a forgáskor ellenindukált elektromotoros erő

$$U = U_0 - I_f \cdot \frac{U_0}{I_a} = U_0 \left(1 - \frac{I_f}{I_a} \right).$$