1. feladat. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$x^3+y^3=a, \qquad xy\,(x+y)=b.$$

Megoldás. Adjuk hozzá az első egyenlethez a második egyenlet 3-szorosát, így a bal oldal $(x+y)^3$ lesz. Ebből köbgyökvonással

$$x+y=\sqrt[3]{a+3b}, \tag{1}$$

majd ezt a második egyenletbe helyettesítve osztással

$$xy=\frac{b}{\sqrt[3]{a+3b}},$$

hacsak $a+3b\neq 0$. Szorítkozzunk egyelőre erre az esetre. Feltételünk mellett $x+y$ és xy mindig léteznek és egyértelműen meghatározott értékek, mert a köbgyökvonás a valós számok körében mindig elvégezhető és egyértelmű. Legyen

$$\sqrt[3]{a+3b}=B \quad \text{és} \quad b/B=C,$$

ekkor x és y a következő egyenlet két gyöke:

$$z^2-Bz+C=0,$$

vagyis

$$\frac{1}{2}\big(B+\sqrt{B^2-4C}\big) \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}\big(B-\sqrt{B^2-4C}\big),$$

bármelyik sorrendben véve. A diszkriminánst a-val és b-vel kifejezve

$$B^2-4C=\frac{1}{B}\left(B^3-4BC\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}}(a+3b-4b)=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}},$$

így a gyökök

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}}\right) \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+3b}-\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}}\right). \tag{2}$$

x és y akkor valósak, ha a négyzetgyök alatt pozitív szám vagy nulla áll. A négyzetgyök alatti tört értéke akkor pozitív, ha számlálója és nevezője egyszerre pozitív vagy negatív, tehát ha

$$a-b>0 \quad \text{és} \quad a+3b>0 \qquad \text{vagy} \qquad a-b<0 \quad \text{és} \quad a+3b<0.$$

Az első esetben, ha $b>0$, akkor $a+3b=a-b+4b>a-b$, tehát elég feltenni, hogy $a-b>0$; ha pedig $b\leq 0$, akkor $a-b=a+3b-4b\geq a+3b$, és így elég az utóbbi kifejezésről megkövetelni, hogy pozitív legyen. Hasonló meggondolásokat alkalmazva a második esetben is, azt nyerjük, hogy x-re és y-ra két különböző valós érték adódik (és mint már mondtuk, szerepük felcserélhető), ha

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\ a-b\ >0 \quad \text{és} \quad b>0, \quad \text{vagy}\\
&\text{II.}\ a+3b>0 \quad \text{és} \quad b\leq 0, \quad \text{vagy}\\
&\text{III.}\ a+3b<0 \quad \text{és} \quad b\geq 0, \quad \text{vagy}\\
&\text{IV.}\ a-b\ <0 \quad \text{és} \quad b<0.
\end{aligned}$$

A négyzetgyök értéke nulla, ha $a=b$ (és $\neq 0$, különben $a+3b=0$ lenne), ekkor egy megoldás van:

$$x=y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+3b}.$$

Ha végül $a+3b=0$, akkor $x+y=0$, és ez a második egyenlettel csak úgy fér össze, ha $b=0$; ekkor $a=-3b=0$ is fennáll. Ekkor minden x-re $y=-x$ választással megoldását kapjuk az egyenletrendszernek. – Ha viszont $a+3b=0$ és $b\neq 0$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Megjegyzések. 1. Ha (2)-ben a számlálóból és nevezőből külön-külön vonunk négyzetgyököt, elveszíthetjük a III. és IV. eseteket.

2. Az $x^3+y^3=(x+y)\,(x^2-xy+y^2)$ azonosság felhasználásával és a két egyenlet elosztásával (x, y, $x+y\neq 0$) az

$$\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=\frac{a}{b}$$

egyenlethez, majd $x/y = u$ helyettesítéssel rendezés után az

$$u^2 - (1 + a/b)\, u + 1 = 0$$

másodfokú egyenlethez juthatunk. u-t kiszámítva az egyik gyök a másikkal kifejezhető. E kifejezést pl. (1)-be helyettesítve a gyökök maguk is kiszámíthatók, de a fentieknél lényegesen bonyolultabb alakban adódnak.

2. feladat. *Egy teherautó éjfélkor indult A városból B városba, egy személyautó pedig t_1 órakor B-ből A-ba (ugyanazon az útvonalon). t_2 órakor találkoztak. A személyautó r órával később ért célba, mint a teherautó. – Dolguk végeztével visszaindultak, t_3 órakor ismét találkoztak, végül egyszerre érkeztek haza. Hány órakor érkeztek meg? –*

Numerikus adatok: $t_1 = 2^{\mathrm{h}}\,40^{\mathrm{m}}$, $t_2 = 4^{\mathrm{h}}$, $r = 0^{\mathrm{h}}\,40^{\mathrm{m}}$, $t_3 = 14^{\mathrm{h}}$.

A megoldások során a következő jelöléseket fogjuk használni: A járművek sebességét – mint az ilyen feladatoknál ez szokásos – állandónak tételezve fel, legyen a tehergépkocsi sebessége v, a személygépkocsi sebessége V, A és B távolsága s, a hazaérkezés közös időpontja x.

I. megoldás. Az első találkozásig a tehergépkocsi vt_2, a személygépkocsi $V\,(t_2 - t_1)$ utat tesz meg, és ez együtt a teljes úthossz

$$s = vt_2 + V\,(t_2 - t_1).$$

A tehergépkocsi menetideje $t_1 - r$ órával több, mint a személygépkocsié, mert az utóbbi A-ból t_1 órával később indult, és B-be r órával később érkezett, mint a tehergépkocsi, azaz

$$\frac{s}{v} = \frac{s}{V} + t_1 - r.$$

E két egyenletből az s utat kiküszöbölve

$$t_2 + \frac{V}{v}(t_2 - t_1) = \frac{v}{V}\, t_2 + t_2 - r, \tag{1}$$

és ezt a v/V hányadosra, mint ismeretlenre rendezve a

$$t_2 \left(\frac{v}{V}\right)^2 - r \left(\frac{v}{V}\right) - (t_2 - t_1) = 0$$

egyenlethez jutunk, amelynek pozitív gyöke

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{2t_2}\big(r + \sqrt{r^2 + 4t_2(t_2 - t_1)}\big).$$

$t_2 > t_1 (\geq 0)$ esetén a gyök mindig valós. A negatív gyöknek nem tulajdonítunk értelmet.

A második találkozás után mind a két gépkocsi még $x - t_3$ ideig volt úton, és ezalatt együttesen ismét befutották az s utat, azaz

$$v(x - t_3) + V(x - t_3) = s = vt_2 + V(t_2 - t_1),$$

amiből $V + v$-vel való osztás és rendezés után

$$x = t_3 + t_2 - \frac{1}{\dfrac{v}{V} + 1} \cdot t_1.$$

A numerikus adatokkal

$$\frac{v}{V} = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad x = 16\frac{2}{5} \text{ óra},$$

azaz a két gépkocsi 16 óra 24 perckor ért haza.

Megjegyzések. 1. Közvetlenül az (1) egyenlet egy kissé átrendezett alakjához vezet a következő meggondolás. Az első találkozásig a tehergépkocsi vt_2, a személygépkocsi $V(t_2 - t_1)$ utat tett meg, és ekkor mindegyik előtt annyi út állt, mint amennyit a másik már megtett. A tehergépkocsi a hátralevő útját $\dfrac{V\,(t_2 - t_1)}{v}$ idő, a személygépkocsi $\dfrac{vt_2}{V}$ idő alatt teszi meg, de ez utóbbi r órával később ér célba, ezért

$$\frac{V(t_2 - t_1)}{v} + r = \frac{vt_2}{V}.$$

2. Hasonló gondolatmenettel x is meghatározható. A visszaindulástól a második találkozásig a tehergépkocsi a személygépkocsi előtt álló $V(x - t_3)$ utat tette meg. Ehhez $\dfrac{V(x - t_3)}{v}$ időre volt szüksége. Hasonlóan a személygépkocsi

a találkozás előtt $\frac{v(x-t_3)}{V}$ idővel indult vissza. Ennek a két időnek a különbsége egyben az egész út megtételéhez szükséges idők különbsége is. Az odamenetre vonatkozó adatok szerint ez az időkülönbség $t_1 - r$, azaz

$$\frac{V(x-t_3)}{v} - \frac{v(x-t_3)}{V} = t_1 - r,$$

amiből x a v/V hányados ismeretében kiszámítható.

II. megoldás. Legyen az első találkozás helye C. A személygépkocsi és a tehergépkocsi menetidőinek aránya az AB úton ugyanaz, mint az AC úton. Legyenek a menetidők az AB úton T, illetőleg t, így

$$T : t = (t_2 - t_1) : (t - t_2).$$

Másrészt láttuk, hogy

$$t - T = t_1 - r.$$

T kiküszöbölésével

$$t^2 - (2\,t_2 - r)\,t + t_2\,(t_1 - r) = 0,$$

ahonnan a nagyobbik gyök

$$t = t_2 + \frac{1}{2}\big(-r + \sqrt{r^2 + 4t_2(t_2 - t_1)}\big),$$

(ugyanis nyilvánvalóan $t > t_2$, a másik gyök nem adhatja a feladat megoldását).

Most már kiszámíthatjuk a második találkozástól a hazaérkezésig eltelt $x - t_3$ időt. Ennyi idő alatt a teherautó az egész út $(x-t_3)/t$ részét, a személyautó az $(x-t_3)/T$ részét teszi meg, a kettő együtt az egész utat – az út 1-szeresét – adja, azaz

$$\frac{x-t_3}{t} + \frac{x-t_3}{T} = 1,$$

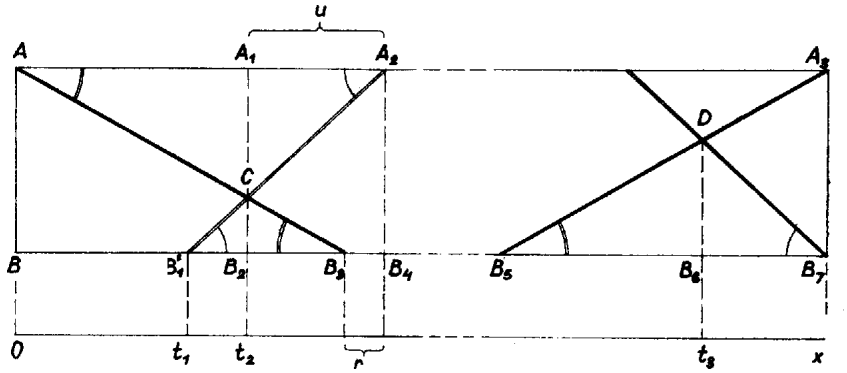
$$x = t_3 + \frac{1}{\frac{1}{t} + \frac{1}{T}} = t_3 + \frac{t}{1 + \frac{t-t_2}{t_2 - t_1}} = t_3 + \frac{t(t_2 - t_1)}{t - t_1}.$$

A numerikus adatokkal $t = 6$, $x = 16{,}4$ adódik.

III. megoldás. Megoldhatjuk a feladatot a mozgások idő–út grafikonjának vázlatára támaszkodó számítással is.

Mindegyik autó oda-vissza útját (külön-külön) egyenlő hajlású szakaszok ábrázolják, ezért végpontjaik, valamint a találkozásokat jelentő pontok közül alkalmasan választott ponthármasok hasonló háromszögeket határoznak meg, és ezek alapjából a találkozási pontok vetületei arányos részeket vágnak le. Az 1. ábra jelöléseivel

$$\frac{B_1B_2}{B_1B_3} = \frac{A_2A_1}{A_2A} = \frac{B_7B_6}{B_7B_5} = \frac{B_7B_6}{BB_3}.$$



1. ábra

Legyen $A_1A_2 = u$ az az idő, amennyivel az első találkozás után a személyautó A-ba érkezik. Ezt mint az első két hányados egyenlőségéből adódó másodfokú egyenlet pozitív gyökét kapjuk:

$$\frac{t_2 - t_1}{t_2 + u - r - t_1} = \frac{u}{t_2 + u},$$

$$u^2 - ru - t_2\,(t_2 - t_1) = 0,$$

$$u = \frac{1}{2}\big(r + \sqrt{r^2 + 4t_2\,(t_2 - t_1)}\big).$$

Ennek alapján a keresett időpont a negyedik és a második hányados egyenlőségéből adódik:

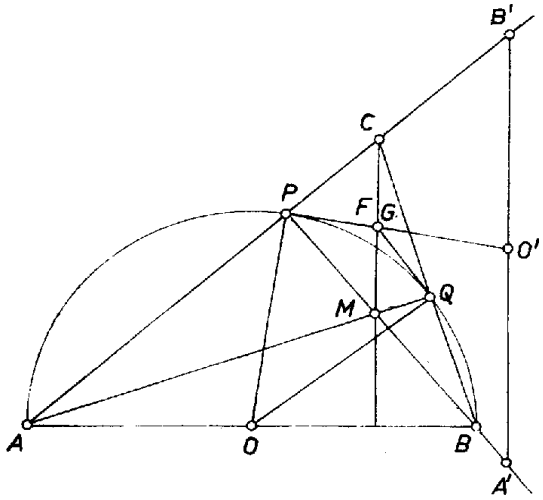
$$\frac{x-t_3}{t_2+u-r}=\frac{u}{t_2+u},$$

$$x=t_3+u\frac{t_2+u-r}{t_2+u}=t_3+u\left(1-\frac{r}{t_2+u}\right).$$

Numerikusan $u=8/3$ óra, és $x=16{,}4$ óra.

3. feladat. *Egy hegyesszögű háromszög egyik oldala mint átmérő fölé kört rajzolunk, és ehhez a másik két oldallal való metszéspontban érintőt húzunk. Bizonyítandó, hogy a két érintő metszéspontja az első oldalhoz tartozó magasságon van.*

Az alábbi megoldások mindegyikében a kört az ABC háromszög AB oldala, mint átmérő fölé rajzoljuk. A háromszögekben szokásos jelöléseket használjuk, legyen továbbá a kör és az AC, BC oldal metszéspontja P, illetőleg Q, a kör középpontja O, és a háromszög magasságpontja M.



2. ábra

I. megoldás. Messe a CM magasságvonalat a kör P-beli érintője F-ben, a Q-beli érintő G-ben (2. ábra). Azt kell belátnunk, hogy F és G egybeesnek.

Thalész tétele miatt P a B-ből húzott magasság talppontja, ezért a P körüli, pozitív irányú 90°-os elforgatás az ABP háromszöget átviszi egy a hozzá hasonló MCP háromszöggel párhuzamos oldalú háromszögbe, a PO sugarat pedig a rá merőleges PF érintőre. Mivel O felezi AB-t, azért F a CM szakasz felezőpontja.

Az ABQ háromszöget Q körül az előbbivel ellentétes irányban átforgatva a CMQ háromszöggel hasonló helyzetbe, ugyanígy látható, hogy G is a CM szakasz felezőpontja, azaz egybeesik F-fel. – Ezzel a feladat állításánál többet bizonyítottunk be, mégpedig azt, hogy a kérdéses metszéspont felezi a magasságpont és az első oldallal szemben fekvő csúcs közti szakaszt.

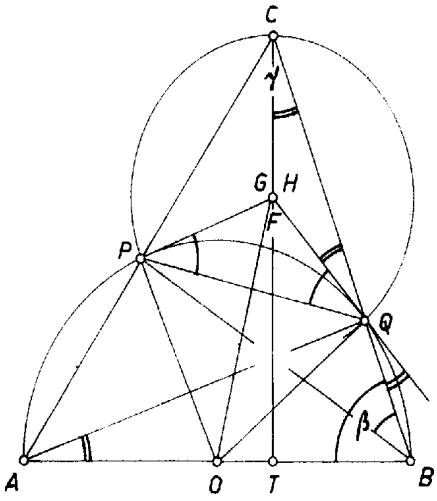
II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a P és Q pontokban húzott érintők H metszéspontját C-vel összekötő egyenes merőleges AB-re, vagyis az ABC háromszög magasságvonala.

A HPQ háromszög egyenlő szárú; P-nél és Q-nál levő szöge egyenlő a kör PQ ívéhez tartozó bármely kerületi szöggel, így a PBQ szöggel is, melynek nagysága a PBC derékszögű háromszögből $90^\circ-\gamma$. Ezért a PQ szakasz H-ból $180^\circ-2\,(90^\circ-\gamma)=2\gamma$ szögben látszik. PQ-nak C-ből vett látószöge viszont γ, és mivel C és H a PQ egyenesnek ugyanazon a partján van, azért a H körül írt, P-n és Q-n átmenő kör átmegy a C csúcson is. Ezért a CHQ háromszög egyenlő szárú, tehát

$$HQC\sphericalangle=QCH\sphericalangle=BCT\sphericalangle, \tag{1}$$

ahol T az AB és CH egyenesek metszéspontja.

A HQC szög csúcsszöge egy a QB íven nyugvó kerületi szög, ezért egyenlő az ugyanazon az íven nyugvó QAB szöggel, ami $90^\circ-\beta$. Így a BCT háromszög C-nél levő szöge $90^\circ-\beta$, vagyis a B-nél levő szögének pótszöge, ezért a T-nél levő szöge derékszög, CT vagyis CH valóban merőleges AB-re.



3. ábra

III. megoldás. A C-ből húzott magasság és a Q pontbeli érintő metszéspontját ismét G-vel jelölve azt fogjuk megmutatni, hogy a G mint középpont körül írt, C-n áthaladó körön rajta van P is, Q is (3. ábra). Ebből ugyanis már következik, hogy $GP = GQ$, és így az OPG és OQG háromszögek három-három oldalban megegyezve egybevágóak, ezért a GPO szög egyenlő a GQO szöggel, az utóbbi pedig $90°$, tehát GP a P-ben húzott körérintő.

Az AOQ és CGQ háromszögek oldalai páronként merőlegesek egymásra, tehát a háromszögek hasonlóak, és így az előbbivel együtt az utóbbi is egyenlő szárú háromszög, $QG = CG$, Q valóban a mondott körön van, és

$$CGQ\sphericalangle = AOQ\sphericalangle = 2\,ABQ\sphericalangle,$$

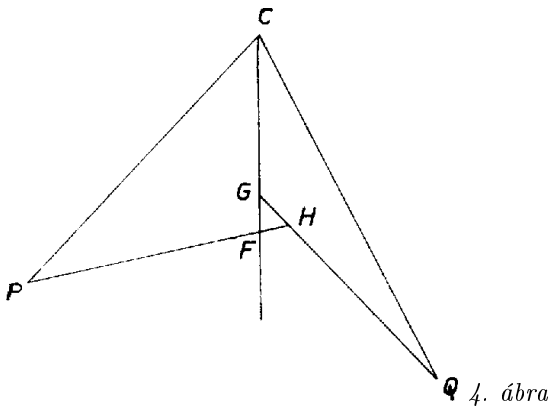
mert az utolsó két szög az AQ íven nyugvó középponti, illetőleg kerületi szög.

Másrészt az $ABQP$ húrnégyszögben az ABQ belső és a CPQ külső szög egyenlő, mert mindkettő az APQ szög $180°$-ra kiegészítő szöge, ezért

$$CGQ\sphericalangle = 2\,CPQ\sphericalangle.$$

Végül G és P a BC oldalegyenes ugyanazon oldalán van, ezért a mondott kör átmegy a P ponton is. Ezt akartuk bizonyítani.

IV. megoldás. Legyen a C-ből húzható magasság és a P-beli, illetőleg Q-beli érintő metszéspontja ismét F, illetőleg G, a két érintő metszéspontja H. Az előző megoldásban láttuk, hogy $CG = QG$. Hasonlóan látható be, hogy $CF = PF$. Továbbá $PH = QH$, mert a körhöz a H pontból húzható érintőszakaszok.



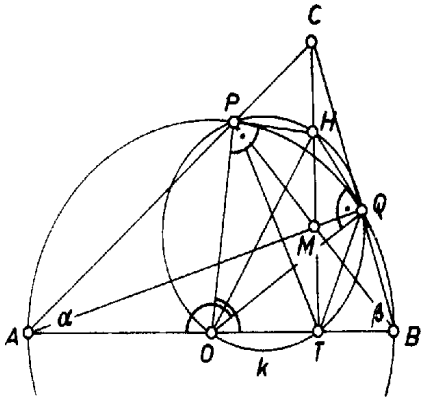
4. ábra

Ha F, G és H nem esne egybe, és például G a CF szakasz belső pontja lenne (4. ábra), akkor H a PF szakasz F-en túli meghosszabbításán és a QG szakasz belsejében lenne, mert így (és az eredeti feltevések szerint) PF belső pontban metszi a CGQ háromszög CQ oldalát, a CG oldalát viszont a meghosszabbításán, tehát a GQ oldalt is belső pontban metszi, vagyis

$$PH > PF = CF > CG = QG > QH = PH,$$

ami lehetetlen.

Ha F esnék a CG szakaszra, akkor hasonlóan adódik, hogy mindenütt az ellenkező értelmű egyenlőtlenség állana fenn, ami ugyancsak lehetetlen. Kell tehát, hogy a három pont egybeessék, és így az érintők a magasságvonalon messék egymást.



5. ábra

V. megoldás. Legyen a két érintő metszéspontja H, a C csúcsból húzott magasság talppontja T (5. ábra). Említettük már, hogy AQ és BP a háromszög másik két magassága. OHP és OHQ háromszögek derékszögűek, és az OH szakasz mint átmérő fölé rajzolt k kör átmegy P-n és Q-n. Megmutatjuk. hogy ez a kör átmegy a T talpponton is[1]. Ebből már következik a feladat állítása, ugyanis ekkor az OTC derékszög TC szára átmegy az O-ból induló átmérő másik végpontján, a H ponton is.

Az AOQ és a BOP szög, mint a BOQ, illetőleg AOP egyenlő szárú háromszög külső szöge, 2β, illetve 2α nagyságú, másrészt együttesen a $180°$-ot egyszer és a POQ szöget kétszeresen fedik le, így

$$POQ\sphericalangle = 2\alpha + 2\beta - 180° = 180° - 2\gamma.$$

Az $ATQC$ és $BTPC$ négyszögek húrnégyszögek (az első az AC, a második a BC mint átmérő fölé rajzolt Thalesz-körben), és így a BTQ, illetőleg ATP külső szögük egyenlő a $PCQ = \gamma$ szöggel. Ezek alapján

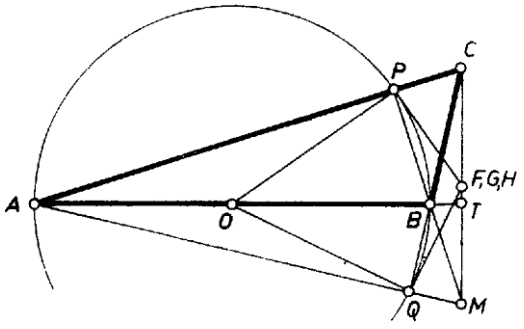
$$PTQ\sphericalangle = 180° - ATP\sphericalangle - BTQ\sphericalangle = 180° - 2\gamma = POQ\sphericalangle.$$

Mivel O és T a PQ egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik, azért O, P, Q és T valóban egy körön van, és ezzel igazoltuk állításunkat.

Megjegyzések. 1. A feladat megoldható a koordinátageometria módszereivel is, de így még a koordinátarendszer szokásos célszerű megválasztása esetén is hosszadalmas számításokkal jutunk célhoz.

2. Ha az ABC háromszög bármelyik szöge derékszög, a feladat állítása érdektelen. Ha ugyanis a derékszög C-nél van, a kérdéses érintők, ha pedig A és B valamelyikénél van, akkor az egyik érintő és a magasság esik egybe.

3. Az olvasó a fenti megoldások csekély változtatásával könnyen beláthatja, hogy az állítás tompaszögű háromszögre is igaz, oldalszakasz helyett természetesen oldalegyenest mondva. Egy ilyen helyzetet mutat be a 6. ábra.



6. ábra

Scharnitzky Viktor

[1] A k kör az ABC háromszög Feuerbach-köre, amely átmegy a magasságok talppontjain, az oldalak felezőpontjain és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjain. Lásd pl. *Gallai T.– Hódi E. – Péter R. – Szabó P. – Tolnai J.:* Matematika az ált. gimn. III. o. számára, 12. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp. 1962. 183 – 188. o. – Az alábbiakban azonban erre való hivatkozás nélkül bizonyítjuk be állításunkat.