

Az idézett feladat¹ olyan másodfokú polinom előállítását kívánta, amelyiknek az értéke az 1, 2, 3 helyeken rendre 1, 1/2, 1/3. Gyakran merül fel általában az a probléma, hogy adott $x_1, x_2, \dots, x_n$ helyeken rendre $y_1, y_2, \dots, y_n$ értéket felvevő, lehetőleg alacsony fokú polinomot állítsunk elő.

A feladat első megoldása a polinom együtthatóira a feltételekből adódó elsőfokú egyenletrendszer megoldása révén történt. Az általános probléma megoldása ez úton akkor várható tetszés szerinti y_i -értékek mellett, ha n együttható áll rendelkezésünkre. Mivel egy k -ad fokú polinomnak $k+1$ együtthatója van, így az n feltétel kielégítésére $n-1$ -ed fokú polinomot kell általában keresnünk. Ez nem jelenti föltétlenül azt, hogy valóban $n-1$ -ed fokú polinom fog adódni, hiszen lehet, hogy a legmagasabb fokú tagok együtthatójára 0-t kapunk. A probléma tehát így vethető fel: *tetszés szerint adva meg n (különböző) változó értéket, „helyet” és ezekhez tartozó függvényértéket, keressünk olyan legfeljebb $n-1$ -ed fokú polinomot, amelyik az adott helyeken az adott értékeket veszi fel.* Ezt interpolációnak nevezzük.

Megmutatható, hogy a feltételekből adódó egyenletrendszer mindig megoldható, és csak egy megoldása van. Az interpolációs polinomnak az ezen az úton való meghatározása azonban igen körülményes. A kitűzött feladat második megoldása egy gyorsabb meghatározási módot mutat be, amire még visszatérünk, előbb azonban bemutatunk egy harmadik eljárást. Ennél sorra vesszük tekintetbe az egyes feltételeket és növeljük eggyel-eggyel a polinom fokszámát úgy, hogy a már kielégített követelmények továbbra is teljesüljenek, és teljesüljön még az újabb követelmény is.

Ha csak az első követelményt tekintjük, van olyan c_1 állandó (és csak egy ilyen van), amelyik az x_1 helyen – és akkor minden helyen – az y_1 értéket veszi fel, ez a $c_1 = y_1$ állandó. Ezt most egy elsőfokú polinom hozzáadásával úgy kell módosítani, hogy az x_1 helyen ne változzék, az x_2 helyen azonban y_2 legyen az értéke. Az x_1 helyen a $c_2(x - x_1)$ elsőfokú polinomok tűnnek el, és c_2 valóban megválasztható úgy, hogy $c_1 + c_2(x - x_1) = y_1 + c_2(x - x_1)$ az x_2 helyen az y_2 értéket vegye fel [$c_2 = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$]. A harmadik követelmény kielégítésére egy x_1 helyen is, x_2 helyen is eltűnő, tehát $c_3(x - x_1)(x - x_2)$ alakú polinomot kell a már megtalálthoz adni, és bármi is y_3 , c_3 mindig választható úgy, hogy az összeg polinom az x_3 helyen az y_3 értéket vegye fel.

Általában arra vezet meggondolásunk, hogy a polinom

$$(1) \quad c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) + \dots + c_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

alakban határozható meg, és itt c_1 -et, c_2 -t, c_3 -at s i. t. végül c_n -et sorban haladva egy-egy elsőfokú egyenletből határozhatjuk meg, ha az előzőket már ismerjük.

Keressük pl. azt a legalacsonyabb fokú polinomot, amelyik a

$$\begin{array}{cccccc} -1, & 0, & 1, & 1,5, & 2,5 & \text{helyeken sorra a} \\ 2, & -1, & 0, & 2, & 3 \end{array}$$

értékeket veszi fel. Természetesen nem vagyunk kötve a megadás sorrendjéhez. Itt például célszerű előre venni azt a két helyet, ahol egyenlő értékeket vesz fel a polinom, mert akkor tudjuk, hogy a konstans (a fenti c_1) megválasztásával mindjárt két követelményt elégítettünk ki, s így az elsőfokú kifejezés együtthatója (c_2) 0 lesz. Vegyük tehát a helyeket $-1, 1,5, 0, 1, 2,5$ sorrendben, és megfelelően keressük a polinomot²

$$c_1 + c_2(x + 1) + c_3(x + 1)(x - 3/2) + c_4(x + 1)(x - 3/2)x + c_5(x + 1)(x - 3/2)x(x - 1)$$

alakban. Előre tudjuk, hogy itt $c_1 = 2$, és azt is, hogy $c_2 = 0$. A 0 helyen vizsgálva a kifejezést az utolsó két tag eltűnik és

$$c_1 + c_2 - 3c_3/2 = 2 - 3c_3/2 = -1, \quad c_3 = 2$$

adódik. $x = 1$ -re

$$2 + 2 \cdot 2 \cdot (-0,5) + c_4 \cdot 2 \cdot (-0,5) = 0, \quad c_4 = 0,$$

– tehát az eddig talált másodfokú függvény a negyedik feltételt is kielégíti –, végül $x = 2,5$ -re

$$2 + 2 \cdot 3,5 + c_5 \cdot 3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5 = 3, \quad c_5 = 16/35,$$

és a keresett polinom

$$\begin{aligned} 2 + 2(x + 1) \left(x - \frac{3}{2} \right) - \frac{16}{35}(x + 1) \left(x - \frac{3}{2} \right) x(x - 1) = \\ = -\frac{16}{35}x^4 + \frac{24}{35}x^3 + \frac{86}{35}x^2 - \frac{59}{35}x - 1. \end{aligned}$$

Behelyettesítéssel láthatjuk, hogy tényleg megfelel a követelményeknek.

¹K. M. L. 31 (1965) 149. old.

²Még ügyesebb lenne a második tényezőt $2x - 3$ alakban írni, ez is a $3/2$ helyen eltűnő tényező. Ezzel csak a megfelelő c_i -k helyébe lépne a felük.

Az 1378. feladat második megoldásában szereplő módszer is általánosan alkalmazható. Állítsuk elő a polinomot olyan polinomok összegeként, amelyek mindegyike egy hely kivételével az összes többin eltűnik, a kérdéses helyen pedig a kívánt értéket veszi fel. Keressük pl. az x_1 helyen y_1 értéket felvevő, $x_2, \dots, x_n$ -re eltűnő polinomot. Az utóbbi feltételt az

$$a_1(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

polinomok elégítik ki. Abból a feltételből, hogy a polinom az x_1 helyen az y_1 értéket vegye fel,

$$a_1 = y_1 / (x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)$$

adódik. Hasonlóan az x_k helyen y_k értéket felvevő, a többi felsorolt helyen eltűnő polinom

$$(2) \quad L_k(x) = y_k \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} = y_k l_k(x).$$

Az

$$(3) \quad L_1(x) + L_2(x) + \dots + L_n(x)$$

polinom szerkesztése szerint megfelel a követelményeknek.

A két eljárást összehasonlítva sok szól az előbbi mellett. Igaz, hogy mindegyik együttthatót egy-egy egyenletből kell kiszámítani, de ezek igen egyszerű elsőfokú egyenletek. Mind a két eljárás szorzatösszegben állítja elő a keresett polinomot, amelyet még beszorzás és összevonás útján hozhatunk polinom alakra, viszont az első esetben csak az utolsó tag $n - 1$ -ed fokú, míg a másodikban minden tag $n - 1$ -ed fokú, mégha a polinom alacsonyabb fokú is. Az első eljárásnál az utóbbi esetben az $n - 1$ -ed fokú tag fel sem lép, együttthatójára 0 adódik, és hasonlóan további együttthatókra is, ha a polinom még alacsonyabb fokú (hasonlóan mint példánkban c_2 -re és c_4 -re). A második eljárásnak viszont előnye, hogy az egyes részpolinomok egymástól függetlenül, és előzetes számítások nélkül felírhatók az x_k -k és y_k -k segítségével, sőt $l_k(x)$ már y_k -tól sem függ. Így a második alak különösen hasznos akkor, ha ugyanazokon a helyeken különböző függvényértékekhez egyszerre több polinomot kell meghatároznunk. Ekkor előre kiszámítjuk az $l_k(x)$ függvényeket, azután csak egy-egy számmal meg kell szorozni őket és összeadni. Ezen túl is igen hasznos lehet további matematikai felhasználásokban, hogy fel tudjuk írni a polinomot, és nemcsak eljárást adunk az előállítására.

Az első eljárás alapján nem túl nehéz belátni a polinom egyértelműségét is, de könnyen belátható, hogy egy legfeljebb $n - 1$ -ed fokú polinom polinomalakját n helyen felvett értéke egyértelműen előállítja, felhasználva, hogy egy polinomnak nem lehet több 0-helye, mint ahányad fokú³. Valóban, ha

$$\begin{aligned} f(x) &= u_0 x^{n-1} + u_1 x^{n-2} + \dots + u_{n-1} \quad \text{és} \\ f^*(x) &= v_0 x^{n-1} + v_1 x^{n-2} + \dots + v_{n-1} \end{aligned}$$

az $x_1, x_2, \dots, x_n$ helyeken ugyanazokat az $y_1, y_2, \dots, y_n$ értékeket veszi fel, akkor az

$$f(x) - f^*(x) = (u_0 - v_0)x^{n-1} + (u_1 - v_1)x^{n-2} + \dots + (u_{n-1} - v_{n-1})$$

legfeljebb $n - 1$ -ed fokú polinom eltűnik az $x_1, x_2, \dots, x_n$ helyeken, tehát több helyen, mint ahányad fokú. Ez csak úgy lehet, ha minden együtttható 0, vagyis $u_i = v_i$ ($i = 0, 1, \dots, n - 1$).

Az interpolációs polinom (1) alakját *Newton-félének*, a (2), (3) által szolgáltatott alakot *Lagrange-félének* nevezik.

Az interpolációs polinomoknak fontos elméleti szerepük van függvények polinomokkal való megközelítésében. Ezek vizsgálata sokat köszönhet sok magyar matematikus, így *Fejér Lipót* és tanítványai, többek közt *Erdős Pál*, *Grünwald Géza*, *Turán Pál*, *Freud Géza* és mások munkásságának.

Surányi János

³Lásd pl. *Hódi B.-Szász G.-Tolnai J.*: Matematika a gimn. IV. o. számára, 11. kiad., Tankönyvkiadó, Bp., 1962. 222. o.