

A) Az általános verseny feladatai:

1. feladat. Egy hatjegyű négyzetszámot három kétjegyű számra vágunk szét. A két szélső egyenlő, a középső pedig a fele ezek egyikének. Melyik e hatjegyű négyzetszám?

Megoldás. Legyen a kérdéses négyzetszám n^2 és jelöljük a középső két jegyből alkotott számot x -szel. Így a két szélső kétjegyű szám $2x$, ezért

$$10 \leq 2x < 100,$$

és így

$$(1) \quad 5 \leq x < 50,$$

másrészt

$$n^2 = 2x \cdot 10^4 + x \cdot 10^2 + 2x = 20\,102x = 2 \cdot 19 \cdot 23^2 \cdot x.$$

Egy négyzetszámot különböző törzsszámok hatványainak szorzataként előállítva minden kitevő páros. Ezért x ilyen előállításában a 2 és 19 törzsszámok páratlan kitevővel szerepelnek, s így a kitevőjük legalább 1, viszont minden más törzsszámhatványban páros szám a kitevő. Eszerint 2 és 19 első hatványát különválasztva, a többiek pedig összefoglalva x így írható:

$$x = 2 \cdot 19 \cdot k^2 = 38k^2, \quad \text{és így} \quad n^2 = (2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot k)^2,$$

ahol k egész szám. (1) csak $k = 1$ esetén teljesül, így az egyetlen lehetséges megoldás:

$$n^2 = (2 \cdot 19 \cdot 23)^2 = 874^2 = 763\,876.$$

Ez valóban meg is felel a feladat követelményeinek.

2. feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(2) \quad \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}.$$

Megoldás. Ahhoz, hogy az egyenletben szereplő kifejezéseknek értelme legyen, kell, hogy $x > 0$, továbbá $x - \sqrt{x} \geq 0$ legyen. Az utóbbi pozitív x -re akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(3) \quad x \geq 1.$$

Ilyen x -ekre a jobb oldali négyzetgyökös kifejezéssel végig oszthatjuk (2)-t, az egyenlet 1-nél nem kisebb x -ekre akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{x^2 - x}{x}} = \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x - 1} = \frac{3}{2},$$

azaz ha

$$(4) \quad \sqrt{x} - \frac{1}{2} = \sqrt{x - 1}.$$

Itt a bal oldal a (3) feltétel mellett pozitív, tehát a két oldal (a gyököket nem negatívnak véve) akkor és csak akkor egyenlő, ha a négyzeteik egyenlők:

$$x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - 1, \quad \sqrt{x} = \frac{5}{4}, \quad x = \frac{25}{16}.$$

Ez 1-nél nagyobb szám, tehát az egyenlet egyetlen megoldása.

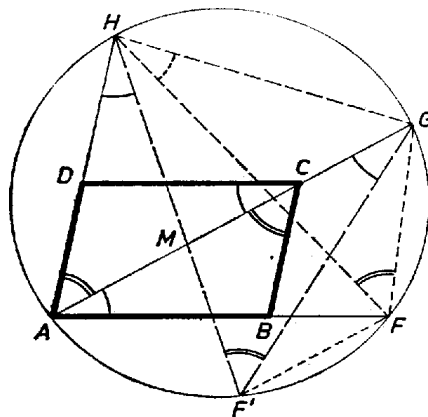
Megjegyzés: (4)-et $\sqrt{x} - \sqrt{x - 1} = 1/2$ alakban írva, majd a pozitív $2(\sqrt{x} + \sqrt{x - 1})$ kifejezéssel szorozva a $\sqrt{x} + \sqrt{x - 1} = 2$ egyenlet adódik, amiből és az előbbiből, mint elsőfokú egyenletrendszerből ismét $\sqrt{x} = 5/4$ és az ezzel összhangban levő $\sqrt{x - 1} = 3/4$ eredmény adódik.

3. feladat. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsán átmenő kör az AB és az AD oldal egyenesét az F , illetőleg az H pontban, az AC átló egyenesét pedig a G pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$(5) \quad AB \cdot AF + AD \cdot AH = AC \cdot AG.$$

Megoldás. Legyen F tükörképe AG felező merőlegesére F' , az AG és $F'H$ egyenesek metszéspontja M .

I. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor F , G , H sorra az A -ból B , C , D felé induló félegyenesen van. Ekkor az AC egyenes elválasztja a B és D pontokat és velük együtt az F és H pontokat is. Így az AC egyenes A és G pontjaival kettévágott körnek különböző ívein van F és H , F' pedig ugyanazon az íven van, mint F , mert $FF' \parallel AG$. Ebből következik, hogy M az AG húr belső pontja.



1. ábra

Megmutatjuk, hogy az

$$(6) \quad AHM, \quad ACD, \quad F'GM \quad \text{és} \quad CAB$$

háromszögek hasonlóak, megfelelő szögeik egyenlők. Ebből már könnyen fog következni (6). A háromszögek megfelelő szögeire egyrészt

$$\underline{ACB \sphericalangle} = \underline{CAD \sphericalangle} = \underline{HAM \sphericalangle} = HAG \sphericalangle = HF'G \sphericalangle = \underline{MF'G \sphericalangle};$$

az utolsó előtti és az azt megelőző szög azonos íven nyugvó kerületi szögek. Másrészt

$$\underline{AHM \sphericalangle} = AHF' \sphericalangle = AGF' \sphericalangle = \underline{MGF' \sphericalangle} = FAG \sphericalangle = \underline{CAB \sphericalangle} = \underline{ACD \sphericalangle}.$$

A második és harmadik szög azonos íven nyugvó kerületi szögek, a negyedik és ötödik pedig egymás tükörképe.

A (6) alatti első és második háromszög hasonlóságából, illetőleg a harmadik és negyedik hasonlóságából a következő arányok olvasható le:

$$\frac{AH}{AM} = \frac{AC}{AD}, \quad \frac{GF'}{GM} = \frac{AC}{AB}.$$

Innen, figyelembe véve, hogy GF' és AF egymás tükörképei, tehát egyenlők, kapjuk, hogy

$$AD \cdot AH = AC \cdot AM, \quad AB \cdot AF = AC \cdot GM,$$

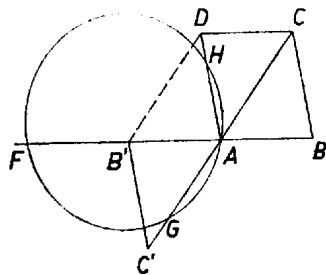
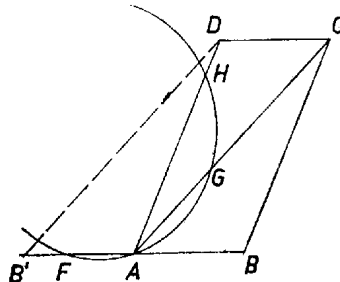
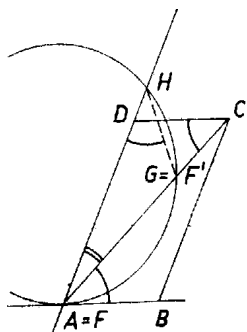
és a kettőt összeadva, mivel $AM + MG = AG$, adódik az (5) egyenlőség.

II. Megmutatjuk, hogy az (5) egyenlőség a kör minden helyzeténél érvényes marad, ha az A -tól B -vel, C -vel, ill. D -vel ellentétes irányban levő pontok távolságát negatívnak tekintjük. Ennek belátására forgassuk a kört az A pont körül pl. az óramutató járásával ellentétes irányban. A fenti bizonyítás nem alkalmazható már, ha a kör az AB oldalt érintő helyzetbe kerül (2. ábra). Ekkor $AF = 0$, másrészt az ACD és AHG háromszögek hasonlóak, mert egy szögük közös és

$$ACD \sphericalangle = CAB \sphericalangle = GAB \sphericalangle = GHA \sphericalangle.$$

Az utolsó egyenlőségben azonos íven nyugvó kerületi szögek szerepelnek. Így

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AH}{AG}, \quad AC \cdot AG = AD \cdot AH = AB \cdot AF + AD \cdot AH.$$



2., 3. és 4. ábra

Ha a kör továbbfordul, F az AB oldal A -n túli meghosszabbítására kerül (G és H még az AC és AD félegyeneseiken lesz, 3. ábra). Jelöljük B -nek A -ra vonatkozó tükörképét B' -vel, ekkor az $ACDB'$ paralelogrammára érvényes az I. alatti bizonyítás és azt adja, hogy

$$AC \cdot AG + AB' \cdot AF = AD \cdot AH,$$

azaz

$$AC \cdot AG = AB' \cdot (-AF) + AD \cdot AH.$$

Így ha magán az AF jelölésen a szakasz negatív előjellel vett hosszát értjük ebben az esetben, akkor az eredeti összefüggés változatlanul helyes marad.

Ha a kör továbbfordulásával G is az AC átló A -n túli meghosszabbítására kerül, akkor vegyük a B és C pontok A -ra vonatkozó B' és C' tükörképét. Az $ADB'C'$ paralelogrammára ismét alkalmazható az I. rész bizonyítása, s így (4. ábra)

$$AC' \cdot AG + AD \cdot AH = AB' \cdot AF,$$

azaz

$$AB \cdot (-AF) + AD \cdot AH = AC \cdot (-AG).$$

Ez azonban ismét azt jelenti, hogy a II. elején mondott előjelmegállapodással (5) érvényben marad.

Ha a kör az AD -t A -ban érintő helyzetben is túlfordul, akkor korábban már tekintetbe vett körhelyzetek A -ra vonatkozó tükörképeit kapjuk. Egy ilyen tükrözés előjelmegállapodásunk szerint AF , AG és AH előjelének egyidejű megváltozását, és így (5) minden tagjának ellenkező előjelűre változását okozza, az egyenlőség helyességét tehát nem változtatja meg. Ezzel a II. alatti állítást is igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Könnyen látható (1. ábra), hogy $ABC\Delta \sim FGH\Delta$. A megfelelő szakaszok arányát h -val jelölve $AB = h \cdot GH$, $AC = h \cdot FH$, $BC = AD = h \cdot FG$. Ezeket (5)-be beírva és h -val egyszerűsítve az $AFGH$ húrnégyszögre a következő összefüggést kapjuk:

$$AF \cdot GH + FG \cdot HA = AG \cdot FH,$$

vagyis *húrnégyszögben a szemközi oldalpárok szorzatainak az összege az átlók szorzatával egyenlő*. Ez az összefüggés PTOLEMAIOS tétele néven ismeretes. A fenti hasonlóság felhasználásával természetesen ebből a feladat állítása is könnyen következik. Ha viszont az I. alatti bizonyításban az ACD és CAB háromszög helyébe egyaránt az FHG háromszöget tesszük, akkor közvetlen bizonyítást kapunk PTOLEMAIOS tételére.

2. A versenyen a bíráló bizottság megelégedett az I. eset tárgyalásával.

B) A speciális matematikai osztály versenyének feladatai:

1. feladat. Egy hatjegyű négyzetszámot három kétjegyű számra vágunk szét. E három kétjegyű szám közül a középső egyenlő az előtte állóval, az utolsó és a középső kétjegyű szám különbsége négyzetszám. Melyik az eredeti hatjegyű szám?

Megoldás. Jelöljük a hatjegyű négyzetszámot n^2 -tel, ennek középső részét alkotó kétjegyű számot x -szel, az utolsó és a középső kétjegyű szám különbségét y^2 -tel. Ekkor feladatunk követelménye így írható:

$$n^2 = x \cdot 10^4 + x \cdot 10^2 + (x + y^2) = 10\,101x + y^2.$$

Ezt átrendezéssel és az együtthatót törzsszámok szorzatára bontva a következő alakra hozhatjuk:

$$(7) \quad (n + y)(n - y) = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot x.$$

n^2 hatjegyű, ez azt jelenti, hogy $10^5 \leq n^2 < 10^6$. Mivel $316^2 < 10^5 < 317^2$, így

$$317 \leq n \leq 999.$$

Másrészt x és $x + y^2$ kétjegyű számok:

$$(8) \quad x \geq 10 \quad \text{és} \quad x + y^2 \leq 99,$$

így

$$y^2 \leq 99 - x \leq 99 - 10 = 89;$$

és mivel nyilván elegendő y nem negatív értékeire szorítkoznunk, azért $0 \leq y \leq 9$.

Így (7) bal oldalának tényezőire a következő korlátozások állnak fenn:

$$(9) \quad \begin{cases} n + y \leq 999 + 9 = 1008, \\ n - y \geq 317 - 9 = 308, \end{cases}$$

továbbá a két tényező különbségére:

$$(10) \quad (n + y) - (n - y) = 2y \leq 18.$$

Ezek szerint olyan x kétjegyű számot kell keresnünk, hogy (7) jobb oldala a (9)–(10) korlátozásoknak megfelelő két egész tényező szorzatára legyen bontható, belőlük n és y is egésznek adódjék, végül x -re és y -ra (8) is teljesüljön. Evégett minden szóba jövő módon két tényező szorzattá próbáljuk alakítani (7) jobb oldalát, gondolva x felbontására is, legyen $x = x_1 x_2$ (x_1 és x_2 egyike lehet 1 is).

A (7) alatti törzsszámok szorzata nagyobb 1008-nál, így nem lehet mind ugyanabban a tényezőben. Két 1008-nál kisebb tényezőre a következő módokon bontható szét:

$$13 \cdot 777, \quad 21 \cdot 481, \quad 37 \cdot 273, \quad 39 \cdot 259 \quad \text{és} \quad 91 \cdot 111.$$

(7) bal oldalának két tényezőjét $13x_1$ és $777x_2$ alakban keresve (9) miatt csak $x_2 = 1$ felel meg, ez a tényező 777, ennél fogva (10) miatt a másik tényezőre

$$777 - 18 = 759 \leq 13x_1 \leq 795 = 777 + 18,$$

amiből, 13-mal osztva, és a hányadosnak csak az egész részét kiírva

$$58 < x_1 \leq 61.$$

n és y csak akkor egész, ha összegük és különbségük ugyanolyan párosságú. A 777-es tényező páratlan, ezért csak $x'_1 = 59$ és $x''_1 = 61$ jön szóba.

Az első esetben $x = x'_1 x_2 = 59$, a második tényező $13 \cdot 59 = 767$, kisebb 777-nél, így $n + y = 777$, $n - y = 767$; amiből $n = 772$, $y = 5$; és $x + y^2 = 84$, kétjegyű szám, tehát megoldást találtunk. Valóban, $772^2 = 595\,984$, megfelel a feltételnek.

A második esetben $x = 61$, és $y = 8$ adódik, ezekből $x + y^2$ háromjegyű szám, innen nem adódik megoldás.

Hasonló gondolatmenettel $21x_1$, $481x_2$ alakú tényezőket keresve (9) miatt csak $x_2 = 1$ vagy 2 lehetséges. Mindkettővel megoldás adódik: $x_2 = 1$ esetén $x_1 = 23$, $x = 23$, $n = 482$, $y = 1$, és $n^2 = 232\,324$; valamint $x_2 = 2$ esetén $x_1 = 46$, $x = 92$, $n = 964$, $y = 2$, és $n^2 = 929\,296$. (Az utóbbiban x_2 , x_1 , n és y kétszer, n^2 és x négyszer akkora, mint az előbbi megoldás megfelelő száma.)

Ha a tényezőket $37x_1$ és $273x_2$ alakban keressük, (9) miatt csak $x_2 = 2$ és 3 jön szóba. $x_2 = 2$ esetén x_1 csak páros lehet, ámde $546 - 18 = 528$ és $546 + 18 = 564$ közé 37-nek csak páratlan többszöröse esik: $555 = 15 \cdot 37$. Nem ad megoldást $x_2 = 3$ sem, mert így x_1 páratlan, viszont $3 \cdot 273 - 18 = 801$ és $3 \cdot 273 + 18 = 837$ közé 37-nek csak páros többszöröse esik: $814 = 22 \cdot 37$.

Nem adódik megoldás sem $39x_1$, $259x_2$ alakú tényezőkkal, sem $91x_1$, $111x_2$ alakú tényezőkkal, mert véve x_2 -nek a (9) megengedte értékeit és a (10) alapján adódó korlátokat, ezek közé x_1 együtthatójának vagy nem esik többszöröse, vagy az adódó többszörös párossága nem egyezik x_2 párosságával.

Mindezek szerint a feladat feltételeinek a következő három négyzetszám felel meg:

$$482^2 = 232\,324, \quad 772^2 = 595\,984 \quad \text{és} \quad 964^2 = 929\,296.$$

2. feladat. *Négy egymás utáni páratlan szám összegéhez hozzáadva a számok szorzatát, továbbá a számokból a tényezők ismétlése nélkül képezhető összes kéttényezős és háromtényezős szorzatokat, eredményül 26 879-et kapunk. Melyik ez a négy szám?*

Megoldás. Tetszés szerinti négy számból, a , b , c , d -ből a feladatban szereplő összeget képezve és egyet hozzáadva szorzattá alakítható kifejezést kapunk, ugyanis

$$1 + (a + b + c + d) + (ab + ac + ad + bc + bd + cd) + \\ + (abc + abd + acd + bcd) + abcd = (1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d),$$

amint az könnyen látható.

Ha a számok egymás utáni páratlan számok, akkor az 1-gyel megnövelt számok egymás utáni páros számok. A köztük középen levő páratlan számot (páratlan számaink közül növekedő sorrendben a harmadikat) x -szel jelölve páros számaink $x - 3$, $x - 1$, $x + 1$, $x + 3$. Ezek szorzatáról tudjuk, hogy 1-gyel nagyobb az adott összegnél, azaz

$$(11) \quad \begin{aligned} (x - 3)(x - 1)(x + 1)(x + 3) &= (x^2 - 9)(x^2 - 1) = \\ &= x^4 - 10x^2 + 9 = 26\,880. \end{aligned}$$

Ebből

$$x^4 - 10x^2 - 26\,871 = 0, \quad x^2 = 5 \pm 164.$$

Csak a pozitív gyökhöz, 169-hez tartozik valós x érték, és pedig $x_1 = 13$, $x_2 = -13$. Ezek páratlan egész számok, így van a feladat feltételeinek megfelelő számnégyes, kettő is: 9, 11, 13, 15 és -17 , -15 , -13 , -11 .

Megjegyzések. 1. Nem használtuk fel a megoldásban a számok páratlan egész voltát, így elég lett volna csak annyit előírni, hogy 2 különbségű számtani sorozatot alkossanak.

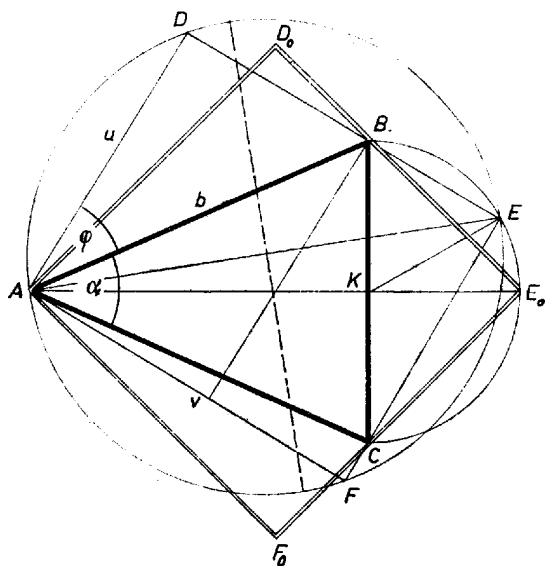
Tovább haladhatunk (11)-ből ezeknek a feltételeknek a kihasználásával és a számtani és mértani közép egyenlőségét használva. (11) pozitív megoldásait keresve a bal oldal a négy egymás utáni páros szám mértani közepének a negyedik hatványa. A számok számtani közepe az x páratlan szám, erre

$$x > \sqrt[4]{26\,880} > \sqrt{163} > 12.$$

$x = 13$ -mal próbálkozva $10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 = 26\,880$, s így megoldást kaptunk, 9, 11, 13, 15 kielégíti a feladat követelményeit. Minden tényezőt a negatívjával helyettesítve látjuk, hogy $-12 - 1 = -13$ is megoldást ad, s így a $-17, -15, -13, -11$ számok is megfelelnek a feladat követelményeinek. Mivel (11) bal oldalának az értéke $x = \pm 1, \pm 3$ -ra 0, 3-nál nagyobb abszolút értékű x -ekre pedig x abszolút értékének növekedésével minden tényező abszolút értéke, tehát a szorzat is növekszik, így több megoldás nincs.

3. feladat. Az ABC hegyesszögű egyenlő szárú háromszög alapja BC . Határozzuk meg a háromszög köré írható A csúcsú téglalapok közül a legnagyobb és a legkisebb területűt.

I. megoldás. Legyen egy az ABC háromszög köré írható, A csúcsú téglalapok közül $ADEF$ úgy, hogy a DE oldal B -n, EF pedig C -n halad át (5. ábra). Így BEC derékszög, ezért E a BC átmérő fölötti Thalész körön van, és pedig ennek azon a félkörén, amelyet a BC egyenes elválaszt A -tól. Jelöljük a kör középpontját (BC felezőpontját) K -val.



5. ábra

a) Megmutatjuk, hogy a keresett legnagyobb területű körülírt téglalapot akkor kapjuk, ha E a mondott félkörív E_0 felezőpontjában adódik. Ekkor a körülírt $AD_0E_0F_0 = N_0$ téglalap négyzet, mert az AE_0 egyenes merőleges BC -re, így felezi a $BE_0C \triangle = D_0E_0F_0$ szöget.

Ha $ADEF = T$ egy N_0 -tól különböző, az ABC háromszög köré írt téglalap, akkor átlója rövidebb, mint AE_0 , mert

$$AE < AK + KE = AK + KE_0 = AE_0.$$

Így minden AE átlójú téglalap területe is kisebb, mint N_0 -é, ugyanis e téglalapok másik két csúcsa az AE átmérőjű körön van, ennek pedig AE -től legtávolabbi pontjai az AE -re merőleges átmérő végpontjai, vagyis az egyenlő átlójú téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb; de még az AE átlójú négyzet területe is kisebb, mint N_0 -é.

b) Az ABC háromszög keresett legkisebb területű körülírt téglalapját akkor kapjuk, ha a téglalap egyik oldala AB vagy AC (e két téglalap szimmetrikus az ABC háromszög tengelyére, így területeik egyenlők). Ekkor ugyanis a téglalap területe 2-szer akkora, mint az ABC háromszögé, és könnyű belátni, hogy körülírt téglalap területe ennél nem lehet kisebb. Ugyanis a B -n át EF -fel párhuzamosan húzott egyenes a körülírt téglalapot és az ABC háromszöget két részre vágja. Mindegyik rész-téglalapba be van írva egy rész-háromszög, amelyiknek egyik oldala a téglalap egy oldalán fekszik, és nem nagyobb ennél a téglalapoldalnál, az ehhez tartozó magasság a téglalap szomszédos oldala. Így a két rész-téglalap területe nem kisebb a rész-háromszögek területe 2-szeresénél, ugyanez áll tehát az ABC háromszögre és a köré írt téglalapra is. Épp kétszer akkora is csak akkor lehet a körülírt téglalap területe, mint a háromszögé, ha a téglalap egyik oldala egybeesik a háromszög egyik szárával.

II. megoldás. Használjuk ismét az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $AC = AB = b$, $BAC \triangle = \alpha$, $AD = u$, $AF = v$, és $BAD \triangle = \varphi$. Az utóbbi szög legkisebb értéke 0, ha ti. T egyik oldala AB ; legnagyobb értéke $90^\circ - \alpha$, ha ti. T egyik oldala AC :

T területe, az ABD és ACF derékszögű háromszögek felhasználásával

$$t = uv = b \cos \varphi \cdot b \sin(\alpha + \varphi),$$

ugyanis $ACF \sphericalangle = CAD \sphericalangle = \alpha + \varphi$.

A két szögfüggvény szorzatát a $\sin z \cos w = [\sin(z+w) + \sin(z-w)]/2$ azonosság alkalmazásával összeggé alakítjuk:

$$(13) \quad t = \frac{b^2}{2} [\sin(\alpha + 2\varphi) + \sin \alpha].$$

A zárójelben csak az első tag változik, és (12)-t 2-vel szorozva, valamint mindenütt α -t hozzáadva a változó szögre

$$(14) \quad \alpha \leq \alpha + 2\varphi = 180^\circ - \alpha.$$

A talált intervallum bal végpontja a feltevés szerint hegyesszög, jobb végpontja tompaszög, közrezárják 90° -ot. Itt veszi fel (13) első tagja a legnagyobb értékét, 1-et, tehát φ -nek a maximális t -t adó értékére

$$\alpha + 2\varphi = 90^\circ \text{-ből} \quad \frac{\alpha}{2} + \varphi = 45^\circ,$$

vagyis t_{max} akkor adódik, ha AD az ABC háromszög AE_0 tengelyével 45° -os szöget zár be. Ekkor a rá merőleges AF oldalegyenes is 45° -ot zár be AE_0 -lal, a körülírt téglalap tükrös AE_0 -ra, tehát négyzet.

Az $y = \sin x$ függvény a (14) intervallum $(\alpha, 90^\circ)$ részintervallumában nő, $(90^\circ, 180^\circ - \alpha)$ részintervallumában fogy, így (13) legkisebb értéke az a és $180^\circ - \alpha$ végpontokban felvett értékek kisebbike. A két végpontban $y = \sin x$ értéke egyenlő, tehát t -nek az

$$\begin{aligned} \alpha + 2\varphi &= \alpha, & \text{azaz } \varphi &= 0^\circ \text{ és az} \\ \alpha + 2\varphi &= 180^\circ - \alpha, & \text{azaz } \varphi &= 90^\circ - \alpha \end{aligned}$$

értékek esetén egyaránt minimuma van. Az első esetben AD azonos AB -vel (és D azonos B -vel), a másodikban AF azonos AC -vel (és F azonos C -vel).

Ezzel a legnagyobb és legkisebb területű körülírt téglalapok meghatározását befejeztük.

Lőrincz Pál, Surányi János