

A) Az általános verseny feladatai

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor

$$(1) \quad a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az egyenlőtlenség bal oldalából levonva a jobb oldalt, a keletkező k különbség nem lehet negatív. Ha a helyébe b -t, b helyébe c -t, c helyébe a -t, vagy a helyébe c -t, c helyébe b -t, b helyébe a -t írunk, a különbségben csak a tagok sorrendje változik meg, ezért feltehetjük, hogy a a számhármásban előforduló legkisebb érték, azaz

$$x = b - a \geq 0 \quad \text{és} \quad y = c - a \geq 0.$$

Fejezzük ki k -t a, x és y segítségével:

$$\begin{aligned} k &= a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a = a^3 + (a+x)^3 + \\ &\quad + (a+y)^3 - a^2(a+x) - (a+x)^2(a+y) - (a+y)^2a = \\ &= 2a(x^2 - xy + y^2) + (x^3 - x^2y + y^3). \end{aligned}$$

Itt egyik zárójeles kifejezés sem negatív, amint az a következő átalakításokból nyilvánvaló:

ha $x \geq y$, akkor

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= x(x-y) + y^2 \geq 0, \quad \text{és} \\ x^3 - x^2y + y^3 &= x^2(x-y) + y^3 \geq 0; \end{aligned}$$

ha pedig $x < y$, akkor

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= x^2 + y(y-x) > 0, \quad \text{és} \\ x^3 - x^2y + y^3 &= x^3 + y(y^2 - x^2) > 0. \end{aligned}$$

Egyik esetben sem lehet tehát k negatív.

A fenti átalakításokból látható, hogy 0 is egyedül akkor lesz k , tehát az eredeti egyenlőtlenség két oldala csak akkor egyenlő, ha mind a két zárójeles kifejezés 0. Ez akkor áll fenn, ha $x = y$ és közös értékük 0, azaz ha $a = b = c$.

II. megoldás. Az előző megoldás bevezető megfontolása szerint feltehetjük, hogy a c szám sem a -nál, sem b -nél nem kisebb. A bal és jobb oldal k különbségét így alakítjuk át:

$$\begin{aligned} k &= a^2(a-b) + b^2(b-c) + c^2(c-a) = \\ &= a^2(a-b) - b^2[(c-a) + (a-b)] + c^2(c-a) = \\ &= (a^2 - b^2)(a-b) + (c^2 - b^2)(c-a) \\ &= (a+b)(a-b)^2 + (c+b)(c-b)(c-a). \end{aligned}$$

Itt egyik tag sem negatív, mert sem az elsőben a különbség négyzete, sem a másodikban a különbségek nem negatívak, tehát $k \geq 0$.

$k = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét tag 0, tehát ha egyrészt $a - b = 0$, vagyis $a = b$, amivel a második tag 2. és 3. tényezője egyenlővé válik, másrészt e két tényező közös értéke is 0, tehát akkor és csak akkor, ha $a = b = c$.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása könnyen következik *Szűcs Adolf* következő tételéből¹: legyen $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq 0$, legyen továbbá $z_1, z_2, \dots, z_n$ az $y_1, y_2, \dots, y_n$ számok elrendezése tetszőleges szerinti sorrendben, akkor

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n &\geq x_1z_1 + x_2z_2 + \dots + x_nz_n \geq \\ &\geq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_{n-1}y_2 + x_ny_1. \end{aligned}$$

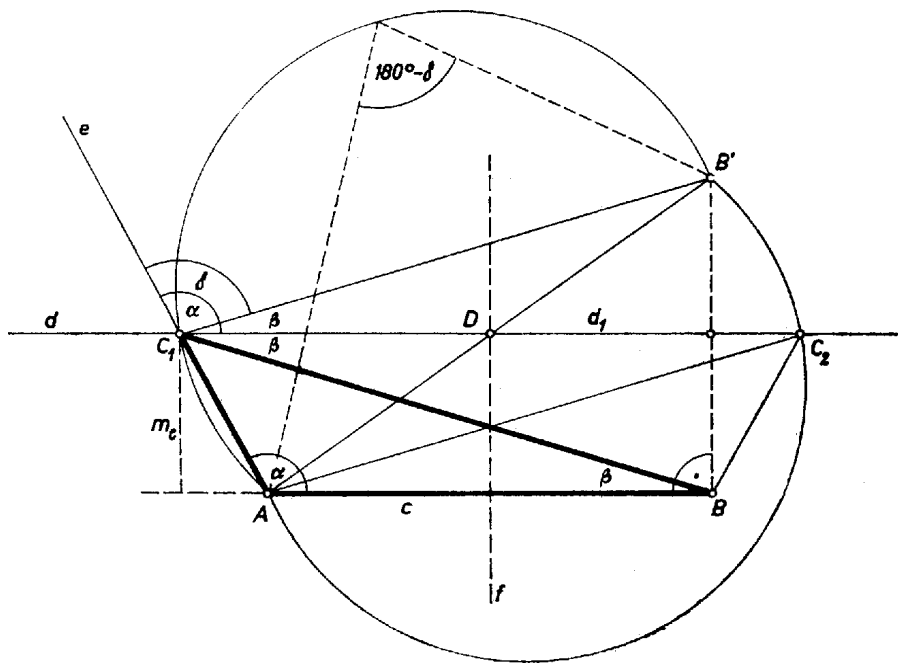
Ebből feladatunk állítása így következik: Legyen $n = 3$, továbbá tegyük fel továbbra is, hogy $a \leq b, a \leq c$. Ha $b \leq c$, legyen $x_1 = c^2, x_2 = b^2, x_3 = a^2, y_1 = c, y_2 = b, y_3 = a, z_1 = a, z_2 = c, z_3 = b$. Ha pedig $b > c$, akkor legyen $x_1 = b^2, x_2 = c^2, x_3 = a^2, y_1 = b, y_2 = c, y_3 = a, z_1 = c, z_2 = a, z_3 = b$. A fenti első egyenlőtlenség mindkét esetben a feladat állítását adja.

2. Az egyenlőtlenség helyessége belátható a számok nagyságviszonyára tett minden megszorítás nélkül is, pl. a következő azonosság alapján:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a &= \\ &= \frac{1}{3}[(a-b)^2(2a+b) + (b-c)^2(2b+c) + (c-a)^2(2c+a)]. \end{aligned}$$

¹V. ö.: *Hajós Gy.-Neukomm Gy.-Surányi J.*: Matematikai versenytételek II. 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965. 44. o.

Legyen ABC a keresett háromszög, a jelölést úgy választva, hogy $AB = c$ legyen az adott hosszúságú oldal, C -nek AB -től való távolsága az adott m_c magasság, az A és B csúcsoknál levő α és β szög különbsége pedig δ . Húzzuk meg C -n át az AB -vel párhuzamos d egyenest. Ennek C -ből induló és AB -vel egyező irányú d_1 félegyenese CB -vel β nagyságú szöget zár be, az AC oldal C -n túli meghosszabbításával, e -vel bezárt szöge pedig a . Így CB -t d -re tükrözve létrejön az adott szögműködés. Jelöljük B tükörképét d -re B' -vel, ekkor CB' is β nagyságú szöget zár be d_1 -gyel, s így CB' és e szöge δ , tehát $ACB' \leq 180^\circ - \delta$.



Tekintsük először az A és D számjegyeket; első jegy gyanánt csak ezek lépnek fel, így egyikük sem 0.

A szorzat utolsó jegye, ami nem más, mint a $D \cdot A$ rész-szorzat utolsó jegye, egyenlő D -vel, így különbségük, $DA - D = D(A - 1)$, osztható 10-zel. Ezért D és $A - 1$ közül legalább az egyik osztható 5-tel, mert 5 törzsszám. Ha D osztható 5-tel, akkor csak $D = 5$ lehet, ha pedig $A - 1$ osztható 5-tel, akkor értéke 5 vagy 0; így az alábbi lehetőségek jönnek szóba:

$$a) \quad D = 5, \quad b) \quad A = 6, \quad c) \quad A = 1.$$

Másrészt a szorzandóra:

$$100 \, D < \overline{DBA} < 100(D + 1),$$

és így a szorzatra:

$$(3) \quad 100 \, D^2 < \overline{DBA} \cdot D = \overline{ABCD} < 100 \, D(D + 1).$$

Hasonlóan a szorzatra a kezdő jegye alapján:

$$(4) \quad 1000 \, A < \overline{ABCD} < 1000(A + 1).$$

A közös belső tag miatt (4) bal oldala kisebb (3) jobb oldalánál, és (3) bal oldala kisebb (4) jobb oldalánál:

$$\begin{aligned} 1000 \, A < 100 \, D(D + 1), \quad \text{azaz} \quad (5) \quad 10 \, A < D^2 + D, \\ 100 \, D^2 < 1000(A + 1), \quad \text{azaz} \quad (6) \quad D^2 < 10(A + 1). \end{aligned}$$

Ezek alapján az $a)$ lehetőség esetében $A < 3$, ill. $A > 1,5$, tehát $A = 2$, így viszont $D(A - 1) = 5$, nem osztható 10-zel, ez a feltevés nem vezet megoldásra.

A $b)$ esetben (6) alapján $D^2 < 70$, $D \leq 8$, ezt felhasználva (5)-ből

$$D^2 > 10 \, A - D = 60 - D \geq 52, \quad D > 7,$$

tehát csak $D = 8$ jön szóba. Ekkor azonban a követelményből

$$\begin{aligned} (800 + 10B + 6) \cdot 8 &= 6000 + 100B + 10C + 8, \\ 2B + C &= B + B + C = 44, \end{aligned}$$

ami lehetetlen, mert három számjegy összege legfeljebb 27. Innen sem kapunk megoldást.

A hátra levő $A = 1$ esetben (6)-ból $D^2 < 20$, $D \leq 4$, így (5)-ből

$$D^2 > 10A - D \geq 10 - 4 = 6, \quad D \geq 3,$$

D szóba jövő értékei 3 és 4. Ekkor (2)-ből

$$\begin{aligned} 100D^2 + 10BD + D &= 1000 + 100B + 10C + D, \\ C + (10 - D)B &= 10(D^2 - 10), \end{aligned}$$

a bal oldal sohasem negatív, a jobb oldal viszont csak $D > 3$ esetén nem az.

A fennmaradt $D = 4$ lehetőség esetében

$$C + 6B = 60,$$

itt $C < 10$ miatt $6B > 50$, $B > 8$, és a $B = 9$, $C = 6$ jegyekkel megoldást kapunk:

$$491 \cdot 4 = 1964,$$

tehát a keresett szám 1964.

A megoldásban nem kellett kihasználnunk, hogy különböző betűk helyére különböző számjegyek írandók, csak azt, hogy kezdő számjegy nem lehet 0.

B) A speciális matematikai osztályok versenyének feladatai

Az **1. feladat** ugyanaz volt, mint az általános versenyen.

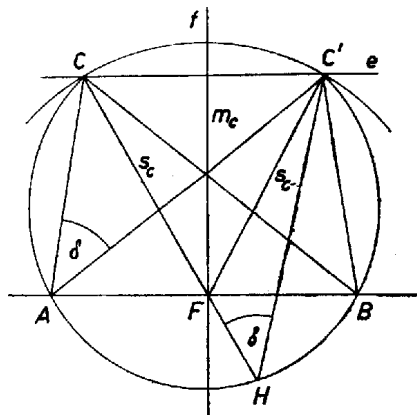
2. feladat. Szerkesszünk háromszöget, ha adott valamelyik oldalához tartozó súlyvonala és magasságvonala, továbbá az ugyanezen oldalon fekvő szögek különbsége.

Megoldás. Legyen a keresett háromszög ABC , benne a C csúcsnak az AB oldaltól, illetőleg annak F felezőpontjától mért távolsága az adott m_c magasság, illetőleg s_c súlyvonal, továbbá a CAB és CBA szögek különbsége egyenlő az adott δ szöggel.

Először a $\delta > 0$ esettel foglalkozunk. Tükrözzük az ABC háromszöget az AB oldal f felező merőlegesére, C tükröképét jelöljük C' -vel. Ekkor CC' párhuzamos AB -vel, tőle m_c távolságra van, $C'F = CF = s_c$, a CC' szakasz látószöge pedig A és B csúcsból a tükrözés folytán a háromszög AB oldalán fekvő szögeinek a különbsége:

$$CAC' \sphericalangle = CBC' \sphericalangle = \delta.$$

Ezek szerint meg tudjuk szerkeszteni először is a CFC' egyenlő szárú háromszöget m_c magasságából és s_c szárából: egy e egyenesre egy pontjában f merőlegest állítunk, erre e -től egyik irányban rámérjük m_c -t, végpontja F . Az F körüli s_c sugarú körrel kimetsszük e -ből a C és C' pontot. Ezután az A és B pontot az F -en át e -vel párhuzamosan húzott egyenesből az az i körív metszi ki, amelyről CC' δ szögben látszik, és amelyik e -nek azon a partján van, amelyiken F .



2. ábra

Az ABC háromszög megfelel a feladat követelményeinek, mert AB -re merőleges magassága m_c , miután $AB \parallel CC'$, CF súlyvonala s_c hosszúságú, végül A és B egymás tükörképe f -re, mert az i ív középpontja rajta van a CC' húr felező merőlegesén, f -en, így az A és B csúcsnál levő szögeinek különbsége egyenlő a CAB és $C'AB$ szögek különbségével, ez pedig szerkesztés szerint δ .

A másik keletkező háromszög, ABC' , az előbbi tükörképe f -re, így nem tekintjük attól különböző megoldásnak.

Nyilvánvaló, hogy a $CC'F$ háromszög akkor és csak akkor jön létre, ha $s_c > m_c$. A és B akkor és csak akkor jön létre, ha F benne van abban a körben, melynek része i , vagyis ha CF -nek F -en túli meghosszabbítása metszi ezt a kört. A metszéspontot H -val jelölve ez akkor és csak akkor következik be, ha

$$CFC' \angle > CHC' \angle = \delta.$$

Ha $\delta = 0$, akkor a háromszög egyenlő szárú, és $m_c = s_c$. Így ha a két feltétel egyike teljesül, akkor csak abban az esetben van a követelményeknek megfelelő háromszög, ha a másik is teljesül. Ha ez nem áll, az adatok ellentmondók; ha viszont teljesül, akkor minden m_c magasságú, egyenlő szárú háromszög megfelel, így a feladat határozatlan.

Összefoglalva: a feladat megoldható, ha $s_c > m_c$, továbbá az m_c magassággal és s_c szárral szerkesztett egyenlő szárú háromszögnek a szárak közti szöge nagyobb δ -nál. E feltételek teljesülése esetén a feladatnak egy megoldása van.

3. feladat. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek első jegyét elhagyva a kapott szám egy prímszám négyszerese, a kapott számra következő szám pedig egy prímszám ötszöröse?

Megoldás. A kérdéses szám első jegye nyilván 1, hiszen minden más esetben az első jegy helyére 1-et írva egy ugyanolyan tulajdonságú, de kisebb számot kapnánk.

Legyen az első jegy elhagyásával keletkező szám N . A feltétel szerint $N = 4p$ és $N + 1 = 5q$, ahol p és q prímszámok. Ebből

$$q = 5q - 4q = 4p + 1 - 4q = 4(p - q) + 1 = 4k + 1,$$

és

$$4p = 5q - 1 = 20k + 4, \quad \text{azaz} \quad p = 5k + 1,$$

ahol k egész szám. k növekedésével p , és így N is növekszik, ezért feladatunk a legkisebb olyan k egész szám meghatározása, melyre $p = 5k + 1$ is, $q = 4k + 1$ is prímszám.

Mivel N nem negatív, így p és q sem, és mivel prímek, így 1-nél nagyobbak, tehát $k \geq 1$. k páros, mert különben $5k + 1$ páros összetett szám lenne. k -nak oszthatónak kell lennie 3-mal is, mert ha 1 maradékot adna, akkor $5k + 1$ lenne 3-mal osztható és 3-nál nagyobb, tehát összetett, ha pedig 2 maradékot adna, akkor $4k + 1$. Így 2-vel és 3-mal, tehát 6-tal is osztható szám: $k = 6n$, $p = 30n + 1$, és $q = 24n + 1$, és feladatunk megkeresni azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre p is, q is prím.

Kipróbálva n első néhány értékét, az alábbi táblázatban kiírtuk egy-egy összetettnek adódó érték prímtényezős felbontását:

$n = 1$	esetén		$24\ n + 1 = 5^2$
$n = 2$	esetén		$24\ n + 1 = 7^2$
$n = 3$	esetén	$30\ n + 1 = 7 \cdot 13,$	
$n = 4$	esetén	$30\ n + 1 = 11^2,$	
$n = 5$	esetén		$24\ n + 1 = 11^2,$
$n = 6$	esetén		$24\ n + 1 = 5 \cdot 29,$
$n = 7$	esetén		$24\ n + 1 = 13^2,$
$n = 8$	esetén	$30\ n + 1 = 241,$	$24\ n + 1 = 193.$

Könnyen ellenőrizhető, hogy 241 és 193 mindegyike prím. Így $N = 4 \cdot 241 = 964$, és a keresett szám 1964.