

Az 1964. évi Országos Középiskolai Matematikai Verseny II. fordulóján kitűzött feladatok között szerepelt a következő: *Ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma < 2$. Több versenyző megmutatta, hogy a bal oldal $3/2$ -nél sem lehet nagyobb, és ekkora is csak a szabályos háromszög esetében lesz.*¹

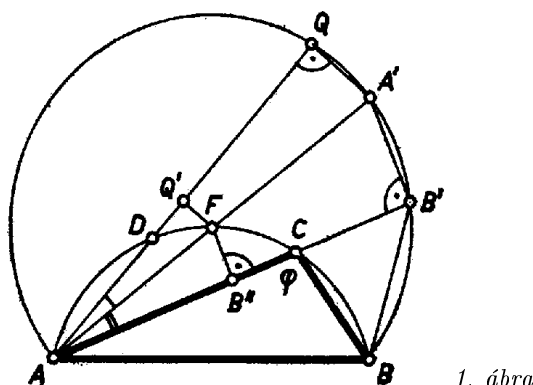
Kézenfekvő a szögek szinuszainak az összegére is felső korlátot keresni. Az alábbiakban mindkét összeget alkalmas távolságösszeggel fogjuk szemléltetni és megmutatjuk, hogy *mindkét összeg a szabályos háromszög esetén a legnagyobb, azaz*

$$(1) \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2},$$

$$(2) \quad \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Mindkét egyenlőtlenséget azzal bizonyítjuk, hogy egy háromszöget, ha nem szabályos, szabályossal helyettesítünk olyan lépésekben, melyek a kérdéses összeget növelik.

Vizsgáljuk (2) bal oldalának geometriai jelentését. Legyen a feladatbeli háromszög köré írható kör átmérője egységnyi, ekkor az ABC háromszög oldalai $AB = \sin \gamma$, $BC = \sin \alpha$, $AC = \sin \beta$, és azt akarjuk vizsgálni, hogy ezen egység-átmérőjű körbe írható háromszögek közül melyiknek a kerülete a legnagyobb.



1. ábra

Rögzítsük a háromszög köré írt kör ACB ívét, és mozgassuk a C csücsöt ezen a köríven (1. ábra). Vajon a C pont mely helyzetére lesz az ABC háromszög kerülete, vagy ami ugyanazt jelenti, az $AC + CB$ összeg a legnagyobb?

Bebizonyítjuk, hogy *az $AC + CB$ összeg akkora legnagyobb, ha C az AB körív felezőpontja, és növekszik, ha C közeledik a felezőponthoz.* E segédtevével lehetővé lesz mind (2), mind (1) igazolása.

Mérjük fel valamennyi AC húr meghosszabbítására a $CB' = CB$ szakaszt. Az így kapott B' pontokból az AB szakasz $\varphi/2$ szögben látszik, ahol φ az AB látószöge a szóban forgó ívről. Valóban, a BCB' egyenlő szárú háromszög alapon levő szöge fele a C -nél levő külső szögnek, ami φ . Tehát a B' pontok az AB húrhoz tartozó $\varphi/2$ látószögű köríven vannak. Ez a körív hosszabb a félkörnél, mert $\varphi/2 < 90^\circ$, így A -tól legtávolabbi pontját az A -ból induló AA' átmérő metszi ki. E körív középpontja az eredeti AB körív F felezőpontja, mert erre $AF = FB$, és $AFB \angle = \varphi$. Megállapíthatjuk tehát, hogy az utóbbi körív $AC + CB = AC + CB' = AB'$ húrja akkor a legnagyobb, ha $C \equiv F$, és annál nagyobb, minél közelebb van az F ponthoz az AC (CB) húr C végpontja. Ez utóbbi azért igaz, mert ha $FD < FC$, akkor $DAF \angle < FAC \angle$, és így – F merőleges vetületét AQ -n Q' -vel, AB' -n B'' -vel jelölve – $FQ' < FB''$, mert az $AQ'F$ és $AB''F$ derékszögű háromszögek átfogói egyenlők. Ezért igaz az is, hogy ha $0 < \widehat{QA'} < \widehat{B'A'}$ – a rövidebb ívekről van szó a mondott végpontok között –, akkor $AB' < AQ < AA'$.

Most már választ adhatunk első kérdésünkre. Megmutatjuk, hogy (2) bal oldala a szabályos háromszög esetén a legnagyobb, azaz *egy körbe írható háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legnagyobb.*

Legyen az ABC háromszögnek 60° -tól különböző szöge. Ekkor szögei közt biztosan van olyan, amelyik nagyobb, és olyan, amelyik kisebb, mint 60° . Válasszuk a betűzést úgy, hogy a háromszög legnagyobb szöge a B csúcsnál, a legkisebb szöge az A csúcsnál legyen (4. ábra). Így C -nél hegyesszög van. Tükrözzük az ABC háromszöget az AB oldal felező merőlegesére. Az ABC' tükrökép egybevágó ABC -vel, tehát kerületük egyenlő.

Tekintsük azt az A kezdőpontú félegyenest, mely az AB félegyenessel 60° -os szöget zár be, és AB -nek ugyanazon oldalán van, mint C . Messe ez a félegyenes a háromszög köré írt kört D -ben. Mivel $BAC \angle < 60^\circ$, és $BAC' \angle > 60^\circ$, azért az AD félegyenes a CAC' szögtartomány belsejében halad. Ugyanez a szögtartomány tartalmazza a kör ACB ívének F felezőpontját is. Eszerint D közelebb van F -hez, mint akár C , akár C' , így segédtevéünk szerint az ABD háromszög kerülete nagyobb az ABC háromszög kerületénél.

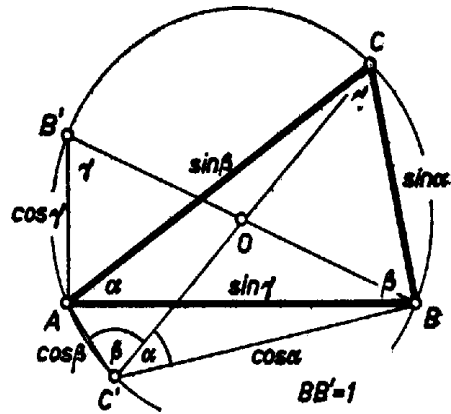
Ha most a kör BAD ívének G felezőpontját tekintjük, akkor – hasonlóan – a BGD háromszög kerülete nagyobb a BAD háromszög kerületénél vagy egyenlő vele, a BGD háromszög pedig szabályos. (Egyenlő akkor, ha G egybeesik A -val, $ACB \angle = 60^\circ$.)

¹ Surányi János: Az 1964. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása, K. M. L. 29 (1964) 106. o.

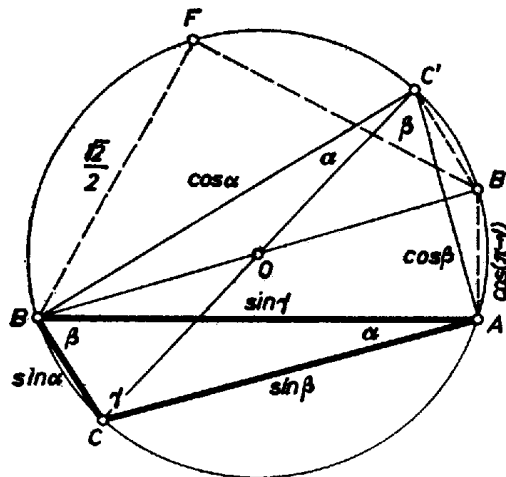
Ezzel igazoltuk, hogy a körbe írt szabályos háromszög kerülete bármely más, ugyanezen körbe írt háromszög kerületénél nagyobb; így (2) bal oldala akkor maximális, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, azaz

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/2,$$

és egyenlőség csak $\alpha = \beta = \gamma$ -ra teljesül.



2. ábra



3. ábra

Most adjunk (1) bal oldalának is geometriai jelentést. (A körülírt kör átmérője most is egységnyi legyen.) Tükrözzük a háromszög B és C csúcsát az O középpontra, tükörképeik legyenek B' és C' (2. és 3. ábra). A kerületi szögekre vonatkozó tétel miatt

$$B'A = \cos \gamma, \quad \text{illetve} \quad \gamma > 90^\circ \text{ esetén } B'A = \cos(\pi - \gamma), \text{ és} \\ C'A = \cos \beta, \quad C'B = \cos \alpha.$$

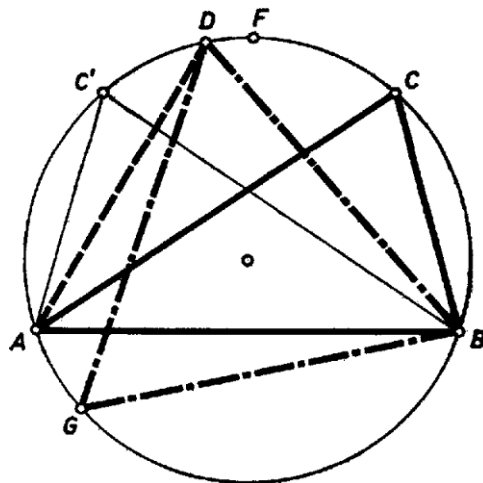
(1) bal oldalát elég hegyesszögű háromszögre vizsgálni. Ha ugyanis az ABC háromszög nem hegyesszögű ($\gamma \geq 90^\circ$), a háromszög-egyenlőtlenség miatt (3. ábra)

$$\cos \beta + \cos \gamma = \cos \beta - \cos(\pi - \gamma) = AC' - AB' \leq B'C',$$

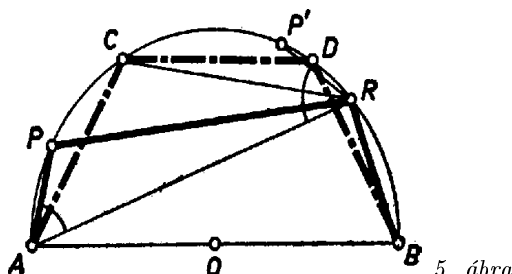
ahol az egyenlőség csak $\gamma = 90^\circ$ -ra teljesül. Ezért segédállításunk miatt

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \cos \alpha + B'C' \leq BF + FB' = \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

Mellékesen tehát azt is beláttuk, hogy (1) bal oldala – nem hegyesszögű háromszögekre szorítkozva –, maximálisan $\sqrt{2}$ lehet, és ezt a határt csak $\alpha = \beta = 45^\circ$ esetén éri el.



4. ábra



5. ábra

Ha háromszögünk hegyesszögű, akkor tartalmazza a körülírt kör O középpontját, s ekkor az (1) bal oldala a BB' egységátmérőjű félkörbe írt három szakaszból (húrból) álló törött vonal hosszával egyenlő (2. ábra). Így arra a kérdésre kell választ adnunk, hogy az AB félkörbe írt $AP + PR + RB$ húrösszeg (5. ábra) mikor a legnagyobb.

A félkör AP , PR , RB ívei között legyen olyan, melyhez 30° -tól különböző kerületi szög tartozik. Ekkor van köztük olyan, amelyikhez 30° -nál nagyobb, és olyan is, amelyikhez kisebb kerületi szög tartozik, feltehetjük, hogy az AP ívhez tartozik a legkisebb, és a következő PR -hez a legnagyobb kerületi szög. (Különbén véve P -nek és R -nek O -ra való tükrképét, P' -t és R' -t, az $APRBP'R'$ centrálszimmetrikus hatszög csúsaiból vett alkalmas egymásra következő 4 megfelel feltételünknek.) Rajzoljuk meg azt az R kezdőpontú félegyenest, mely RA -val 30° -os szöget alkot, és RA ugyanazon oldalán van, mint P , messe ez az APR ívet C -ben. Mivel $ARP < 30^\circ$ és $PAR > 30^\circ$, ha az AR felező merőlegesére P -t tükrözzük, az RC félegyenes a PRP' szögtartományban halad, és ugyanez a szögtartomány tartalmazza az APR körív felezőpontját. Az előzőek szerint, mivel C e felezőponthoz közelebb van, mint P vagy P'

$$AC + CR > AP + PR.$$

Ha most tekintjük a CRB körív D felezőpontját, akkor

$$CD + DB \geq CR + RB,$$

és egyenlőség csak akkor áll, ha RB ívhez 30° -os kerületi szög tartozik. Így

$$AC + CD + DB > AP + PR + RB$$

és

$$AC = CD = DB.$$

Ezzel beláttuk, hogy a félkörbe írt három, sugárnyi hosszú húr összege nagyobb bármely más e félkörbe írt megfelelő húr összegénél, tehát *egy AB félkörbe írt $AP + PR + RB$ húrösszeg – ha a pontok sorrendje A, P, R, B – akkor a legnagyobb, ha $AP = PR = RB$.* Így (1) bal oldala akkora legnagyobb, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, azaz

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2,$$

és egyenlőség csak $\alpha = \beta = \gamma$ esetén áll.

A továbbiakban (1) és (2) egy-egy általánosítását adjuk.

Ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor bármely pozitív egész n -re

$$(3) \quad \sqrt[n]{\sin \alpha} + \sqrt[n]{\sin \beta} + \sqrt[n]{\sin \gamma} \leq 3 \sqrt[n]{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

továbbá, ha α, β, γ egyike sem tompaszög, akkor

$$(4) \quad \sqrt[n]{\cos \alpha} + \sqrt[n]{\cos \beta} + \sqrt[n]{\cos \gamma} \leq 3 \sqrt[n]{\frac{1}{2}}.$$

A bizonyítást csak az $n = 2^k$ esetre végezzük el k -ra vonatkozó teljes indukcióval.

A $k = 0$ -ra (egy szám „első gyökén” magát a számot értve) bizonyítottuk az állítást. Tegyük fel, hogy (3) és (4) fennáll $n = 2^k$ -ra, ahol $k > 0$; bebizonyítjuk, hogy akkor fennáll $n = 2^{k+1}$ -re is. Tekintsük a következő összegeket:

$$(5) \quad \sqrt[2^{k+1}]{\sin \alpha} + \sqrt[2^{k+1}]{\sin \beta} + \sqrt[2^{k+1}]{\sin \gamma},$$

$$(6) \quad \sqrt[2^{k+1}]{\cos \alpha} + \sqrt[2^{k+1}]{\cos \beta} + \sqrt[2^{k+1}]{\cos \gamma}.$$

Felhasználjuk, hogy nem negatív számok mértani közepe nem nagyobb számtani közepükénél. Ha $u, v, w \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned} (\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w})^2 &= (u + v + w) + 2(\sqrt{uv} + \sqrt{uw} + \sqrt{vw}) \leq (u + v + w) + \\ &+ 2\left(\frac{u+v}{2} + \frac{u+w}{2} + \frac{v+w}{2}\right) = 3(u + v + w). \end{aligned}$$

Eszerint (5) és (6) négyzetére

$$\left(\sqrt[2^{k+1}]{\sin \alpha} + \sqrt[2^{k+1}]{\sin \beta} + \sqrt[2^{k+1}]{\sin \gamma} \right)^2 \leq 3 \left(\sqrt[2^k]{\sin \alpha} + \sqrt[2^k]{\sin \beta} + \sqrt[2^k]{\sin \gamma} \right) \leq 9 \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

illetve

$$\left(\sqrt[2^{k+1}]{\cos \alpha} + \sqrt[2^{k+1}]{\cos \beta} + \sqrt[2^{k+1}]{\cos \gamma} \right)^2 \leq 3 \left(\sqrt[2^k]{\cos \alpha} + \sqrt[2^k]{\cos \beta} + \sqrt[2^k]{\cos \gamma} \right) \leq 9 \sqrt[2^k]{\frac{1}{2}}$$

igaz az indukciós feltevés miatt, amiből négyzetgyökvonással adódik az állítás.

Pogáts Ferenc