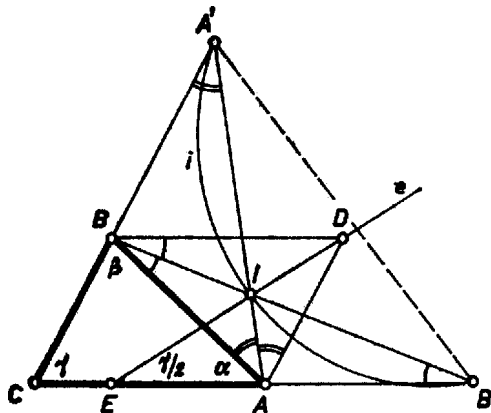


Az 1261. feladat ¹ tetszés szerinti háromszögre fogalmazva az ABC háromszög megszerkesztését kívánta, ha adott a $p = AB + BC$ és a $q = AB + AC$ szakasz, továbbá a $\gamma = ACB \sphericalangle$. Az alábbiakban egy olyan megoldást mutatunk be, amelyik csupán az I. gimnázium tananyagára támaszkodik, a hasonlóság fogalmát sem használja fel ², viszont nem könnyű belátni, hogy valóban a kívánt tulajdonságú háromszöget kapunk. Ennek bizonyítását feladatul fogjuk kitűzni ³.



Az áttekinthetőség kedvéért tegyük fel, hogy ha a két távolság különböző, a kisebbet jelöltük p -vel. Ez nem jelent megszorítást. Mérjük rá a CA oldal A -n túli és a CB oldal B -n túli meghosszabbítására az $AB' = BA' = AB$ távolságot, jelöljük AA' és BB' metszéspontját I -vel. Ekkor $A'C = p$, $B'C = q$, és az ABB' és ABA' egyenlő szárú háromszögek szárai alkotta külső szögek az ABC háromszög $BAC \sphericalangle = \alpha$ és $ABC' \sphericalangle = \beta$ szöge. Így

$$ABB' \sphericalangle = AB'B \sphericalangle = \frac{\alpha}{2}, \quad BAA' \sphericalangle = BA'A \sphericalangle = \frac{\beta}{2}, \quad \text{továbbá}$$

$$A'IB' \sphericalangle = AIB \sphericalangle = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Húzzunk másrészt párhuzamost A -ból BC -vel és B -ből AC -vel, metszéspontjuk legyen D . Ekkor $ABD \sphericalangle = \alpha$, $BAD \sphericalangle = \beta$. Így AI és BI az ABD háromszög szögfelezői, tehát DI is felezi a D -nél levő γ nagyságú szöget, mert a harmadik szögfelező is átmegy I -n. Jelöljük AC és DI metszéspontját E -vel. Ekkor $AED \sphericalangle = EDB \sphericalangle = \gamma/2 = EDA \sphericalangle$, tehát az ADE háromszög egyenlő szárú, így

$$\begin{aligned} CE &= CA - EA = CA - AD = CA - CB = \\ &= (CA + AB) - (CB + AB) = q - p. \end{aligned}$$

Meggondolásaink a következő szerkesztéshez vezettek:

Szerkesszünk egy $A'B'C$ háromszöget, amelynek két oldala $A'C = p$, $B'C = q$, és a köztük levő szög γ .

Rajzoljuk meg azt az i körívet, amelyről az $A'B'$ szakasz $180^\circ - \gamma/2$ szögben látszik és amelyik az $A'B'$ egyenes ugyanazon oldalán van, mint a C pont.

Mérjük rá CB' -re a $CE = q - p$ távolságot.

Az E -n átmenő és a CB' irányval $\gamma/2$ szöget bezáró e egyenes metszi ki i -ből az I pontot.

Végül az A és B pont az $A'I$ -nek $B'C$ -vel és $B'I$ -nek $A'C$ -vel való metszéspontja.

Ha az elemzés gondolatmenetét meg akarjuk fordítani, nehéz hol elkezdni. Az A -ból BC -vel és B -ből AC -vel párhuzamos egyenes e -n metszi-e egymást? A keletkező háromszögnek AA' , BB' szögfelezői-e, AB , AB' és $A'B$ egyenlők-e? Egyik sem látszik könnyű kérdésnek. A megoldást, a leírt szerkesztés helyességének igazolását feladatul tűzzük ki.

¹Lásd 198. old.

²Hasonlóan a közölt III. megoldáshoz, 200. old.

³Lásd 1398. feladat, 222. old.