

1. Az 1964. évi Arany Dániel matematikai verseny egyik feladatában¹ azt kellett bizonyítani, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

A bizonyításban nehézséget okozott az, hogy a jobb oldalon álló kifejezés nem szimmetrikus; emiatt nem lehet feltenni, hogy $a \geq b \geq c$. Azt még feltehetjük, hogy a a legnagyobb, de ezzel már meghatároztuk, hogy „melyik a b és melyik a c ”, mégpedig b a jobb oldalon az a^2 -tel és c négyzete a -val egy tagban szerepel. Amennyiben az egyenlőtlenséget a fenti feltétellel igazoljuk, akkor $a \geq c \geq b$ esetén azt kapjuk, hogy $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2c + c^2b + b^2a$.

Ha azonban azt tűzzük ki célul, hogy a fenti két egyenlőtlenség mindegyikét igazoljuk, akkor már feltehető, hogy $a \geq b \geq c$. Valóban, hiszen ha b -t és c -t felcseréljük, ezáltal a két egyenlőtlenség jobb oldala cserélődik fel, és ez, ha mindkét egyenlőtlenséget igazoljuk, nem okoz problémát.

Nézzük meg, hogyan lehet a két egyenlőtlenséget egyszerre igazolni. Tegyük fel, hogy $a \geq b \geq c$ és írjuk a két igazolandó egyenlőtlenséget a következő alakba:

$$(i) \quad \begin{aligned} aa^2 + bb^2 + cc^2 &\geq ac^2 + ba^2 + cb^2; \\ aa^2 + bb^2 + cc^2 &\geq ab^2 + bc^2 + ca^2. \end{aligned}$$

Ha az $A = a^2$, $B = b^2$ és $C = c^2$ jelölést használjuk, akkor a feladatot következőképpen fogalmazhatjuk meg. Igazolni kell két $aA + bB + cC \geq aA' + bB' + cC'$ alakú egyenlőtlenség teljesülését, ahol A', B', C' az A, B, C számokat jelenti valamilyen sorrendben, és $a \geq b \geq c$.

Itt többféle általánosítási lehetőség is kínálkozik.

a) Az igazolandó két egyenlőtlenség helyett több egyenlőtlenséget is igazolhatunk egyszerre úgy, hogy az egyenlőtlenség jobb oldalára A', B' és C' helyébe az A, B és C számokat az összes lehetséges sorrendben beírjuk (ezt 6-féleképpen tehetjük meg).

b) Az egyenlőtlenséget (illetve egyenlőtlenségeket) nem három-, hanem többtagú összegre igazoljuk.

c) Eltekintünk attól, hogy A, B, C az a, b, c számoktól függnék.

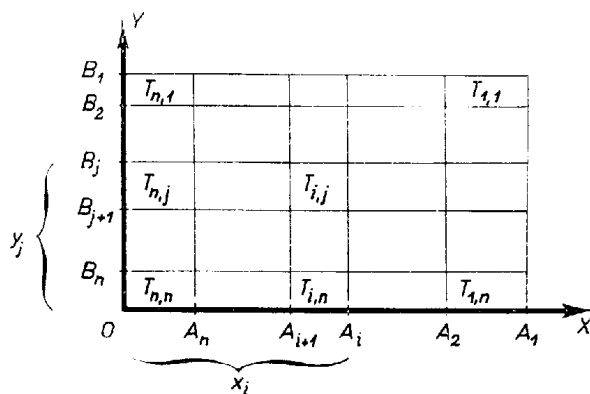
Az első két általánosítás egyszerre is elvégezhető, és mint látni fogjuk, az egyenlőtlenség így is igazolható; sőt bizonyos fokig a harmadik általánosítási lehetőséggel is élhetünk. (Ez a feltétel teljesen nyilván nem is hagyható el.) Annyit fogunk csak feltenni, hogy a szereplő „nagy betűk” ugyanolyan nagyság szerinti sorrendben vannak, mint a megfelelő „kis betűk”. A következőket fogjuk kimutatni:

Legyenek $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ és $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ pozitív számok, amelyekre $y_i = y_{i+1}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $x_i = x_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Jelöljük $u_1, u_2, \dots, u_n$ -nel az $y_1, y_2, \dots, y_n$ számok egy tetszés szerinti sorrendben való felírását. Ekkor:

$$(ii) \quad x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \geq x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n,$$

és egyenlőség csak az $u_1 = y_1, u_2 = y_2, \dots, u_n = y_n$ esetben áll.²

Az alábbiakban erre az egyenlőtlenségre geometriai bizonyítást adunk.



2. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel először, hogy az x_i -k különbözők ($i = 1, 2, \dots, n$).

Tekintsünk a sík valamely O pontjából kiinduló két egymásra merőleges félegyenest. Vegyük fel az egyiket az O -tól x_i távolságra levő A_i , a másikon az O -tól y_j távolságra levő B_j pontokat ($i, j = 1, 2, \dots, n$). E pontokból kiindulva húzzunk a másik félegyenessel (azzal, amelyiken nincs rajta a pont) párhuzamos félegyenest (1. ábra).

Tekintsük most $i \neq n$ esetén az A_i és A_{i+1} pontokon, $i = n$ esetén az A_n és O pontokon át húzott párhuzamos egyenespárt; valamint $j \neq n$ esetén a B_j és B_{j+1} pontokon, $j = n$ esetén a B_n és O pontokon át húzott párhuzamos egyenespárt. Mivel az x_i -k és y_j -k egymás közt különbözők, ezért az A_i pontok nem esnek egymásra, és nyilván O -tól

¹ Fried Ervin: Az 1964. évi Arany Dániel tanulmányversenyek II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása (kezdők versenye) X. M. L. XXX (1965) 1-2. o.

² Ezen egyenlőtlenség bizonyítása megtalálható: Hajós Gy. – Neukomm Gy. – Surányi J.: Matematikai versenytételek II. 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965. 44. o.

is különböznek, és hasonlóan a B_f pontok is egymástól és O -tól különbözök, így a két egyenespár minden i, j számpár esetére egy-egy téglalapot határoz meg; jelöljük ezt $T_{i,j}$ -vel.

Tekintsük most az $x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$ összeget. Legyen $u_i = y_j$, ekkor az összeg egyik tagja x_iy_j . Ez a szorzat megegyezik azon téglalap területével, melynek három csúcsa: A_i , O és B_j . Ezen téglalapot a párhuzamos egyenesek azon $T_{p,q}$ téglalapokra bontják fel, melyekre $p \geq i$ és $q \geq j$. Így x_iy_j e kis téglalapok területének összegével és az egész $x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$ összeg is bizonyos $T_{p,q}$ téglalapok területének összegével egyenlő. Az összegben egyes $T_{p,q}$ téglalapok többször is fellépnek. (Például $T_{n,n}$ biztosan szerepel minden tag esetén, így n -szer lép fel.)

Azt, hogy hányszor lép fel egy-egy $T_{p,q}$ téglalap, következőképpen határozhatjuk meg. Gondolatban vágjunk ki n téglalapot, melyek szomszédos oldalainak hossza rendre x_1 és u_1 , x_2 és u_2 , $\dots$, x_n és u_n , és e téglalapokat helyezzük rá az 1. ábrára úgy, hogy a x_i és u_i oldalhosszúságú téglalap három csúcsa A_i be, O -ba és B_j be essék (ha $u_i = y_j$). Mármint valamely $T_{p,q}$ téglalap nyilván pontosan annyiszor lép fel, ahány kivágott téglalap lefedi. Jelöljük a $T_{p,q}$ téglalapot lefedő kivágott téglalapok számát $n_{p,q}$ -val.

Az a téglalap, amelynek három csúcsa A_i -be, O -ba és B_j -be esik, akkor fedi le a $T_{p,q}$ téglalapot, ha $i \leq p$ és $j \leq q$ egyszerre teljesül. Ha most $r \geq p$ és $s \geq q$, akkor $r \geq p \geq i$ és $s \geq q \geq j$ folytán minden a $T_{p,q}$ -t lefedő kivágott téglalap lefedi $T_{r,s}$ -t is, tehát

$$(iii) \quad \text{ha} \quad r \geq p \quad \text{és} \quad s \geq q, \quad \text{akkor} \quad n_{r,s} \geq n_{p,q}.$$

Visszatérve a $T_{p,q}$ -t lefedő kivágott téglalapokra, azt kell meghatározni, hány olyan (A_i , O és B_j -he eső csúcsú) kivágott téglalap van, amelyre $i \leq p$ és $j \leq q$ egyszerre teljesül. Ilyen kivágott téglalap legfeljebb annyi van, ahány p -nél nem nagyobb i és hozzá q -nál nem nagyobb j található (ii) jobb oldalán. A feltételnek pontosan p számú i , és pontosan q számú j érték felel meg. Így a $T_{p,q}$ téglalapot lefedő kivágott téglalapok száma legfeljebb annyi, mint amekkora a p és q számok közül a kisebbik, vagy a közös értékük, ha a kettő egyenlő. Ezt a számot $\min(p, q)$ -val szokás jelölni, így

$$(iv) \quad n_{p,q} \leq \min(p, q).$$

3. Térjünk rá most annak a megállapítására, hogy mikor lesz az $x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$ összeg a lehető legnagyobb. Ez biztosan teljesül akkor, ha a (iv) alatti egyenlőtlenségben minden $T_{p,q}$ téglalapra egyenlőség szerepel. Speciálisan szükséges, hogy $n_{i,i} = i$ legyen. Ekkor $n_{1,1} = 1$ alapján $T_{1,1}$ -et biztosan lefedi kivágott téglalap. Ilyen kivágott téglalap pedig csak egy van, mégpedig az, melynek két csúcsa – az ábrára való ráhelyezés után – A_1 be és B_1 -be esik. (O -t tovább nem említjük a kivágott téglalapok helyzetének leírásában.) Ezen kivágott téglalap pedig éppen az x_1y_1 szorzatnak felel meg. Tehát $u_1 = y_1$ kell, hogy legyen.

Ezt figyelembe véve hasonlóképpen megállapítható, hogy $u_2 = y_2$ és így tovább. Általában, ha már tudjuk, hogy $u_1 = y_1$, $u_2 = y_2$, $\dots$, $u_{i-1} = y_{i-1}$, akkor következőképpen mutathatjuk ki, hogy $u_i = y_i$. A $T_{i,i}$ -t lefedő i számú kivágott téglalap közül $i - 1$ már $T_{i-1,i-1}$ -et is lefedi. Ezen kivágott téglalapok csúcsai rendre az A_1 és B_1 , A_2 és B_2 , $\dots$, A_{i-1} és B_{i-1} pontokba esnek. Ezért a $T_{i,i}$ -t lefedő i -ik kivágott téglalap A_p és B_q csúcsára az teljesül, hogy p is és q is legalább i . Másrészt, mivel e kivágott téglalap a $T_{i,i}$ téglalapot lefedi, ezért mind p , mind q legfeljebb i lehet, amiből $p = q = i$ következik. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $u_i = y_i$. (Ez a bizonyítás speciális esetként tartalmazza $u_2 = y_2$, $u_3 = y_3$, $\dots$, $u_n = y_n$ bizonyítását, i helyére rendre 2-t, 3-at, $\dots$, n -et téve.) Ezzel kimutattuk tehát a kívánt egyenlőtlenséget, és azt is, hogy egyenlőség csak akkor teljesül, ha minden i -re $u_i = y_i$.

Mint láttuk, az $u_i = y_i$ esetben, ha $p = q$, akkor (iv)-ben az egyenlőség teljesül. Kimutatjuk, hogy minden p, q párra egyenlőség áll fenn. Ugyanis $\min(p, q)$ -t r -rel jelölve (iii) szerint $n_{p,q} \geq n_{r,r}$ amiről viszont már tudjuk, hogy r -rel egyenlő; azaz $n_{p,q} \geq r = \min(p, q)$. Ebből, és az (iv) egyenlőtlenségből pedig már adódik az $n_{p,q} = \min(p, q)$ egyenlőség.

4. Most egy hasonló típusú, de ellenkező irányú egyenlőtlenséget fogunk vizsgálni.

A fenti módszerrel azt is megállapíthatjuk, hogy az $y_1, y_2, \dots, y_n$ számok milyen $u_1, u_2, \dots, u_n$ sorrendje esetén lesz az $x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$ összeg a lehető legkisebb. Az előzőekben azt vizsgáltuk meg, hogy az egyes $T_{p,q}$ téglalapokat legfeljebb hány kivágott téglalap fedi le. Itt azt kell megnézni, hogy legalább mennyi.

Ha az A_i és B_j csúcsú kivágott téglalap nem fedi le a $T_{p,q}$ téglalapot, akkor vagy $i > p$, vagy $j > q$. Mivel i és j egyike sem nagyobb n -nél, ezért az első eset $n - p$, a második eset $n - q$ kivágott téglalapra teljesül. Ezen kivágott téglalapokon kívül a többi biztosan lefedi a $T_{p,q}$ téglalapot. Mivel összesen n darab kivágott téglalap van, ezért a $T_{p,q}$ téglalapot legalább $n - (n - p) - (n - q) = p + q - n$ kivágott téglalap fedi le. Persze, ha $p + q \leq n$, akkor ez a megállapítás semmitmondó, ez esetben azt tudjuk, hogy a $T_{p,q}$ téglalapot legalább 0 darab kivágott téglalap fedi le. Így:

$$(v) \quad n_{p,q} \geq p + q - n, \text{ ha } p + q > n, \text{ és } n_{p,q} \geq 0, \text{ ha } p + q \leq n.$$

Amennyiben valamely $x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$ összeg esetén (v)-ben mindig egyenlőség áll, akkor ez az összeg a lehető legkisebb lesz. Ehhez többek között szükséges az, hogy a $T_{i,n-i}$ téglalapot semmilyen i -re se fedje le egy kivágott téglalap sem, a $T_{i+1,n-i}$ téglalapot pedig pontosan egy fedje. Tegyük fel, hogy ez utóbbi téglalapot lefedő egyetlen kivágott téglalap csúcsai A_p és B_q . Ez azt jelenti, hogy $p \leq i + 1$ és $q \leq n - i$. Ha mármint $p \leq i$, vagy $q \leq n - i - 1$ volna, akkor e kivágott téglalap lefedné a $T_{i,n-i}$ vagy a $T_{i+1,n-i-1}$ téglalapot, melyeket a kívánt esetben egyetlen kivágott téglalap sem fedhet le. Így ez esetben a $T_{i+1,n-i}$ téglalapot lefedő kivágott téglalap csúcsai A_{i+1} és

B_{n-i} . Ez pedig azt jelenti, hogy az összeg megfelelő tagja $x_{i+1}y_{n-1}$ (azaz $u_{i+1} = y_{n-i}$ vagyis az y -ok éppen fordított sorrendben szerepelnek, mint az előző esetben). Ekkor lesz tehát a fenti összeg a lehető legkisebb, minden más esetben ennél nagyobb.

Itt is kimutatjuk, hogy $n_{p,q}$ -ra az (v) alatti egyenlőtlenségben az egyenlőség áll fenn. Ha $p+q \leq n$, akkor $q \leq n-p$, és az (iii) alatti egyenlőtlenséget felhasználva: $n_{p,q} \leq n_{p,n-p} \leq 0$; ebből $n_{p,q} \leq 0$ miatt $n_{p,q} = 0$ következik. – Ha pedig $p+q > n$, akkor $T_{p,q}$ -t azok az A_{i+1} és B_{n-i} csúcsú kivágott téglalapok fedik le, melyekre $i+1 \leq p$ és $n-i \leq q$, azaz amelyekre $n-q \leq i \leq p-1$. Az ilyen téglalapok száma pedig $(p-1) - (n-q-1) = p+q-n$, amint állítottuk.

Végeredményül tehát a következőket kaptuk:

Legyenek $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, valamint $y_1 > y_2 > \dots > y_n$ pozitív számok, és $u_1, u_2, \dots, u_n$ az $y_1, y_2, \dots, y_n$ számok valamely sorrendje. Legyen ezenfelül $M = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ és $m = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1$. Ekkor:

$$m \leq x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n \leq M,$$

és egyenlőség a bal, illetve jobb oldalon csak akkor lehet, ha $u_1 = y_n, u_2 = y_{n-1}, \dots, u_n = y_1$, illetve ha $u_1 = y_1, u_2 = y_2, \dots, u_n = y_n$.

5. Térjünk rá most az általános esetre, amikor x_i -k és y_i -k közt egyenlők is lehetnek. Fent két helyen használtuk ki, hogy sem az x_i -k, sem az y_j -k között nem voltak egyenlők. Először akkor, amikor megállapítottuk, hogy az A_i és A_{i+1} , valamint a B_j és B_{j+1} pontokon át húzott egyenesek egy téglalapot határoznak meg. Másodszor, amikor megállapítottuk, hogy csak egyetlen olyan eset van, amikor minden $T_{p,q}$ téglalapot pontosan annyi kivágott téglalap fed le, amennyi egyáltalában lefedheti (illetve amennyinek feltétlenül le kell fednie). Az első esetben fellépő problémán könnyen lehet segíteni. Nevezetesen csak azon A_i és B_j pontok esetében készítjük el a $T_{i,j}$ téglalapokat, amikor ez lehetséges, azaz ha $x_i \neq x_{i+1}$ és $y_j \neq y_{j+1}$. Ezután a bizonyítás szó szerint úgy megy, mint a tárgyalt esetben, egészen addig, amíg a második probléma nem lép fel. Annak a bizonyítása, hogy $x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$ nem lehet nagyobb, mint $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, illetve nem lehet kisebb, mint $x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1$, ugyancsak nem okoz problémát. Hiszen a megfelelő helyen megállapítottuk, hogy a tárgyalt esetekben minden $T_{p,q}$ téglalap pontosan annyszor van lefedve, ahányszor egyáltalában lefedhető (illetve amennyiszor feltétlenül le kell fedni).

Tegyük fel, hogy $y_i \neq y_{i+1}$ pontosan akkor teljesül, ha $x_i = x_{i+1}$ és legyen $x_j \neq x_{j+1} = x_{j+2} = \dots = x_k \neq x_{k+1}$. Ha $x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n = M$, akkor a szereplő összegnek megfelelő kivágott téglalapok minden $T_{p,q}$ -t pontosan annyszor fednek le, amennyiszor az egyáltalában lehetséges. Vagyis $T_{j,j}$ -t j darab és $T_{k,k}$ -t k darab ($k > j$). Így $T_{k,k}$ -t $k-j$ olyan kivágott téglalap fedi le, mely $T_{j,j}$ -t nem fedi. De ez a k darab téglalap nem fedheti le $T_{j,k+1}$ -t és $T_{k+1,j}$ -t sem, hiszen ezeket legfeljebb j darab kivágott téglalap fedheti le, márpedig a $T_{j,j}$ -t lefedő j számú téglalap ezeket is lefedi. Így a szereplő $k-j$ számú téglalap megfelelő oldalainak hossza x_k , illetve y_k . Ezen $k-j$ számú téglalap rendre az $x_{j+1}u_{j+1}, x_{j+2}u_{j+2}, \dots, x_ku_k$ szorzatnak felel meg. Mivel az $u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_k$ számok mindegyike – mint láttuk – megegyezik y_k -val, ezért $u_{j+1} = y_{j+1}, \dots, u_k = y_k$. Így, ha az x_i -k és $y_j - k$ között egyenlők is lehetnek, de $y_i = y_{i+1}$ pontosan $x_i = x_{i+1}$ esetén teljesül, akkor is érvényes, hogy $x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n = M$ csak akkor lehet, ha minden i esetén $u_i = y_i$. Ugyanígy belátható a hasonló állítás m -re nézve, ha az $y_i = y_{i+1}$ pontosan $x_{n-i} = x_{n-i+1}$ esetén teljesül.

Amennyiben csak azt kötjük ki, hogy $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ és $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ pozitív számok, az

$$m \leq x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n \leq M$$

egyenlőtlenség ugyanúgy igazolható, mint itt történt. Egyenlőség azonban más esetekben is felléphet.

A fenti módon azt is meg lehet állapítani, hogy mikor lehet egyenlőség. Kimutatható, hogy egyenlőség csak akkor lehet (és akkor nyilván fenn is áll az egyenlőség), ha minden x_iu_i rendre megegyezik valamelyik x_jy_j -vel (illetve x_jy_{n-j+1} -gyel), mégpedig úgy, hogy más és más x_iu_i -hez más és más x_jy_j (x_jy_{n-j+1}) található, amellyel megegyezik.