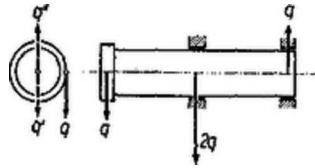


Az 1963. évi Eötvös Loránd fizikai verseny

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 19-én rendezte ez évi Eötvös Loránd fizikai versenyét Budapesten és 6 vidéki városban az idén érettségizettek számára. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait és azok megoldását.

1. 2 méter hosszú, 8 centiméter átmérőjű vízszintes rúd közepén és egyik végén csapágyazva van. A csapágyak csúszó súrlódási együtthatója 0,05. A rúd másik végén 10 centiméter átmérőjű tárcsa van, amelynek kerületéről fonál lóg le. Mekkora súly akasztható e fonál végére, hogy a rúd (a súrlódás folytán) még ne jöjjön forgásba? A rúd és tárcsa önsúlya elhanyagolandó.



1. ábra

Megoldás. A fonálra akasztott q súly a tárcsa kerületéről lecsüngő fonálon lóg (1. ábra). A tárcsa középpontjában hozzáveszünk függőlegesen felfelé irányuló, ugyanakkora q' és q'' erőket. Közülük q' a rúd tárcsás végét le akarja hajlítani. Ezt a q' erőt a csapágyakban függőlegesen lefelé ható $2q$ és függőlegesen felfelé ható q erők ellensúlyozzák. q és q'' erőkből álló erőpár $5q$ forgatónyomatékkal forgatja a rudat. μ súrlódási együttható esetében $2\mu q$ és μq a lehetséges legnagyobb súrlódási erők, tehát az a legnagyobb forgatónyomaték, amely a súrlódási erő által létre jöhet:

$$2\mu q \cdot 4 + \mu q \cdot 4 = 12\mu q.$$

A súrlódási erő szempontjából nem lényeges, hogy a $2q$ és q erők felfelé vagy lefelé hatnak-e, mindenképp ugyanaz a súrlódási erő szerepel, ha az erő merőlegesen szorítja egymáshoz a csúszó felületeket.

A szerkezet nyugalomban maradásának az a feltétele, hogy a lehetséges legnagyobb súrlódási forgatónyomaték egyenlő vagy nagyobb legyen, mint a fonálra akasztott súly forgatónyomatéka:

$$5q \leq 12\mu q, \quad \text{adatainkkal: } 5q \leq 0,6q.$$

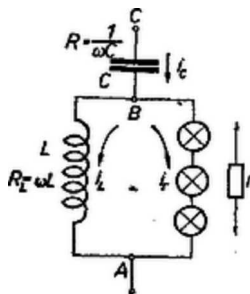
Látható, hogy ez a feltétel csak $q = 0$ esetben teljesülhet, ami azt jelenti, hogy a szerkezet már a fonálra akasztott legkisebb terhelés mellett is forgásba jönne. Érthető az ok: q növelése ugyanolyan mértékben növeli a rudat forgató forgatónyomatékat, mint a súrlódási erők forgatónyomatékát.

Egyensúlyfeltételünkéből látható, hogy $\mu = 5/12 = 0,416$ vagy ennél nagyobb súrlódási együttható esetében a rúd nem jönne forgásba bármilyen nagy ráakasztott teher esetében sem. Ugyanígy elérhető a nyugalom feltétele a rádiuszok megfelelő változtatásával is.

Más a helyzet, ha figyelembe vesszük a rúd önsúlyát (Q). Ha az egész szerkezet súlypontja nincs a csapágyakon kívül, akkor az önsúly folytán létrejövő súrlódási erő μQ , és ennek forgatónyomatéka $4\mu Q$. Ezt hozzáadjuk egyensúlyfeltételünk jobb oldalához (0,05 értékű súrlódási együtthatóval): $5q \leq 0,6q + 0,2Q$. Most nem egyszerűsíthetünk q -val és megállapíthatjuk az egyensúly feltételét. Feladataink számadatai mellett az egyensúly feltétele: $q \leq Q/22$.

2. Hogyan méretezendő a rajz szerinti kapcsolásban a kondenzátor és az önindukciós tekercs, hogy adott rezgésszámú és nagyságú váltófeszültség mellett az izzólámpák ugyanakkora áramerősséggel égjenek, tekintet nélkül arra, hogy hány darab egyforma izzólámpát használnak?

Megoldás. Ha a berendezés A és C pontjára szinuszos váltófeszültséget kapcsolunk, akkor bármely két pont között fellépő váltófeszültség és bármely alkatrészben folyó áramerősség ugyanolyan rezgésszámú szinuszfüggvény szerint változik, de az amplitúdók és fázisok a legkülönbözőbbek lehetnek (2. ábra). Feltételezzük, hogy az együttesen r ellenállású izzólámpa-sorozatban $i_r = i_{r0} \sin \omega t$ váltóáram van, és ebből állapítjuk meg, miféle váltófeszültségnek kell A és C között lennie. ω körfrekvencia mindvégig adott, t az idő.



2. ábra

Ohm törvénye szerint az ohmos ellenálláson, vagyis A és B között jelen levő váltófeszültség $U_{AB} = r i_{r0} \sin \omega t$. Ugyanez a váltófeszültség van az L önindukciójú, $R_L = \omega L$ induktív ellenállású tekercs végein is. A tekercs árama 90° -kal késik a feszültséghez képest:

$$i_L = \frac{r}{R_L} \cdot i_{r0} \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Összegeznünk kell a párhuzamosan kapcsolt ohmos ellenállás és a tekercs áramerősségét. Mindegyik ugyanolyan hullámhosszú szinuszfüggvény, de eltérő amplitúdóval és fázissal.

Két eltérő amplitúdójú és fázisú sinus összegezésének általános eljárása a következő:

$$\begin{aligned} A \sin \omega t + B \sin(\omega t + \beta) &= A \sin \omega t + B \cos \beta \sin \omega t + \\ &+ B \sin \beta \cos \omega t = (A + B \cos \beta) \sin \omega t + B \sin \beta \cos \omega t = \\ &= E \left[\frac{A + B \cos \beta}{E} \cdot \sin \omega t + \frac{B \sin \beta}{E} \cdot \cos \omega t \right], \end{aligned}$$

ahol

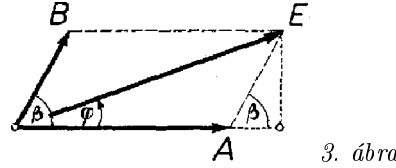
$$E = \sqrt{(A + B \cos \beta)^2 + (B \sin \beta)^2}.$$

Ez az azonos átalakítás lehetővé teszi, hogy a $\sin \omega t$ és $\cos \omega t$ előtt álló szorzókat ugyanazon szög $\cos$ -ának és $\sin$ -ának tekintsük, mert e mennyiségek négyzetösszege 1. Ugyanezen φ szög tangense:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B \sin \beta}{A + B \cos \beta}.$$

Tehát két szinuszhullámunk összege:

$$E[\cos \varphi \sin \omega t + \sin \varphi \cos \omega t] = E \sin(\omega t + \varphi).$$



3. ábra

3. ábránk mutatja, hogy E olyan paralelogrammának átlója, melynek oldalai A és B , az oldalak szöge β , és E -nek A -val alkotott szöge φ . Számításunk ezen geometriai értelmezése teszi lehetővé szinuszhullámok grafikus összegezését az ún. vektordiagramokkal.

Összegezzük az ohmos ellenálláson és a tekercsen átfolyó áramokat:

$$i_r + i_L = i_{r0} \sin \omega t + \frac{r}{R_L} \cdot i_{r0} \sin(\omega t - 90^\circ) = i_{r0} \sqrt{1 + (r/R_L)^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi),$$

ahol

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{R_L}, \quad \sin \varphi = \frac{r/R_L}{\sqrt{1 + (r/R_L)^2}} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (r/R_L)^2}}.$$

Ez lesz a kondenzátor árama: $i_r + i_L = i_C$. A kondenzátor feszültségekülönbsége ehhez képest késik 90° -kal:

$$U_{BC} = R_C i_C \sin(\omega t - \varphi - 90^\circ) = R_C i_{r0} \sqrt{1 + (r/R_L)^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi - 90^\circ).$$

Az egész berendezésre jutó teljes feszültségekülönbség, vagyis az A és C pontok között levő hálózati feszültség:

$$\begin{aligned} U &= U_{AB} + U_{BC} = r i_{r0} \sin \omega t + R_C i_{r0} \sqrt{1 + (r/R_L)^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi - 90^\circ) = \\ &= i_{r0} \sqrt{r^2 + R_C^2 [1 + (r/R_L)^2] - 2r R_C \sqrt{1 + (r/R_L)^2} \cdot \sin \varphi \cdot \sin(\omega t + \gamma)} = \\ &= i_{r0} \sqrt{r^2 + R_C^2 + r^2 (R_C/R_L)^2 - 2r^2 (R_C/R_L) \cdot \sin(\omega t + \gamma)} = \\ &= i_{r0} \sqrt{R_C^2 + r^2 (1 - R_C/R_L)^2} \cdot \sin(\omega t + \gamma). \end{aligned}$$

Számításunk közben felhasználtuk $\sin \varphi$, illetve $\cos \varphi$ értékét, és azonos átalakításokat végeztünk.

Tehát ha azt akarjuk, hogy az izzólámpa-sorozaton a megkívánt $i_{r0} \sin \omega t$ váltóáram haladjon át, akkor A és B pontokra e képletünk által adott feszültséget kell kapcsolnunk. Ez a feszültség független lesz r ohmos ellenállástól, ha ennek $1 - R_C/R_L$ szorzója nullával egyenlő. Ebből következik a feladat megoldása:

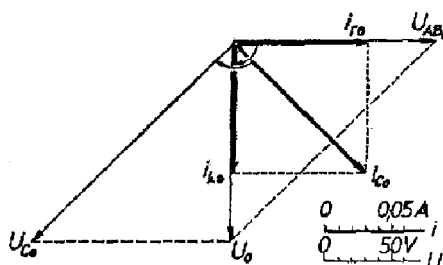
$$1 - R_C/R_L = 0, \quad R_C = R_L, \quad \frac{1}{\omega C} = \omega L, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

tehát a rezonanciaesetet kell beállítanunk.

A szinuszok összegezéséből következik, hogy

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{R_C}{r(1 - R_C/RL)}.$$

Ha beállítjuk a rezonanciafeltételt, akkor $U = R_C i_0$ és $\gamma = -90^\circ$, tehát az izzólámpa-sorozat árama amplitúdó és fázis tekintetében ugyanaz, mintha egyszerűen csak a kondenzátort kapcsoltuk volna a váltófeszültségre.

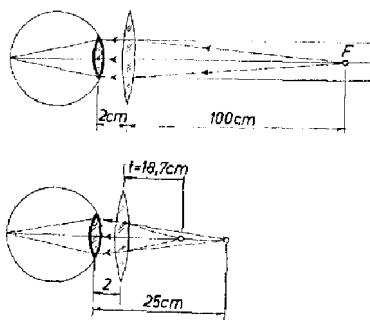


4. ábra

A vektordiagrammot 4. ábránk mutatja abban az esetben, ha $\omega = 314 \text{ sec}^{-1}$, $C = 2 \cdot 10^{-6}$ farad, $R_C = 1500$ ohm, $L = 5$ henry, $R_L = 1500$ ohm, tehát teljesül a rezonanciafeltétel) és például $r = 1500$ ohm. Egymásra rajzoltuk a feszültségek és áramerősségek ábráját, mindegyiket a saját léptéke szerint; a feszültségeket folytonos, az áramerősségeket szaggatott vonalú nyilak mutatják. $i_{r0} = 0,1$ amperes értéket vettünk fel. Ugyanebben az irányban kellett felrajzolni az A, B pontokra jutó 150 voltos amplitúdójú feszültséget. Ennek hatására a tekercsben a 90° -kal hátramaradó i_{r0} amplitúdójú váltóáram keletkezik, amelyet i_{r0} -al összegezve kapjuk i_{C0} -t. A kondenzátor feszültsége ehhez képest 90° -kal késik (U_{C0}). Végül ezt U_{AB0} -al egyesítve kapjuk a hálózati feszültség $U_0 = 150$ voltos amplitúdóját. Ha más ohmos ellenállás felhasználásával végezzük el a szerkesztést, az ábra részletei módosulnak, de U_0 végpontja ugyanoda esik.

3. Normális látású ember 25 centimétertől végtelenig lát élesen. Milyen határok között fog élesen látni, ha szeme elé, a szemlencsétől 2 centiméterre egy 1 dioptriás gyűjtőlencsét helyez?

Megoldás. Ha a szem végtelenre van élesre állítva, akkor a szemlencsébe párhuzamos sugarak érkeznek. A szem elé gyűjtőlencsét téve akkor jutnak a szembe párhuzamosan a sugarak, ha a gyűjtőlencse fókusz távolsága 100 cm, tehát az élesen látás határa: 100 cm a lencsétől, illetve 102 cm a szemtől számítva (5. ábra)



5. ábra

Ha szemünk lencséje a 25 cm távolságból érkező sugarak számára van beállítva, akkor ez azt jelenti, hogy az 1 dioptriás lencse számára a virtuális képtávolság -23 cm. Ehhez t tárgytávolság tartozik, amelyet a lencsetörvényből számítunk ki:

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{t} + \frac{1}{-23}.$$

Innen $t = 18,7$ cm. Tehát ebben az esetben az élesen látás távolsága 18,7 cm a lencsétől, 20,7 cm szemüinktől számítva.

A verseny eredménye: I. díjat nyert *Tichy Géza* (a budapesti Árpád gimnáziumban Peller József és Dömötör Gábor tanítványa), II. díjat nyert *Abos Imre* (a budapesti II. Rákóczi Ferenc gimnáziumban Petyerity Géza tanítványa), III. díjat nyert *Major János* (a budapesti Kandó Kálmán technikumban Bárczy Barnabás tanítványa). Dicséretet kaptak *Gács Iván* (a budapesti Bánki Donát technikumban Bangha József tanítványa), *Lánc József* (a budapesti I. István gimnáziumban Pálos Jenő tanítványa) és *Máthé István* (a budapesti Bánki Donát technikumban Galambos Imre tanítványa).