

1. feladat. Bizonyítandó, hogy ha α , β és γ egy háromszög szögei, akkor

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma < 2.$$

I. megoldás. Írjunk γ helyébe $180^\circ - (\alpha + \beta)$ -t, majd igyekezzünk szorzattá alakítani:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \cos \alpha + \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 1 - (1 - \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha) \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 1 - (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta) + \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Itt a második tag nem pozitív, mert a koszinusz-függvény nem vesz fel 1-nél nagyobb értéket, a harmadik pedig kisebb 1-nél, mert egyik tényezője sem nagyobb 1-nél, de nem lehet mindkettő egyszerre 1 sem (nem lehet α is, β is 90°). Így

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma < 2,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás. Az állítás helyes, ha a háromszög nem hegyesszögű, mert ekkor az egyik tag nem pozitív, a másik kettő mindegyike pedig 1-nél kisebb.

Hegyeszögű háromszögben válasszuk a betűzést úgy, hogy γ és a vele szemben levő $AB = c$ oldal legyen a legkisebb, illetve a legkisebbek egyike. Jelöljük továbbá γ csúcsát C -vel, az AC , BC oldalakat b -vel, ill. a -val; legyen C merőleges vetülete az AB egyenesen C_1 , ez az oldal belső pontja. Így

$$c = AC_1 + C_1B = b \cos \alpha + a \cos \beta.$$

Innen, mivel feltevés szerint $a \geq c$, $b \geq c$, így

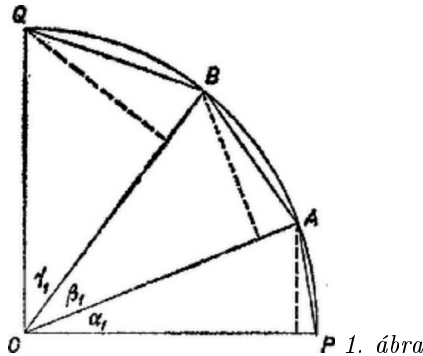
$$1 = \frac{b}{c} \cos \alpha + \frac{a}{c} \cos \beta \geq \cos \alpha + \cos \beta;$$

a harmadik szögre $\cos \gamma < 1$, tehát helyes az állítás hegyesszögű háromszögben is.

III. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség, mint az előző megoldásban is láttuk, nyilvánvalóan helyes, ha a háromszög nem hegyesszögű. Hegyeszögű háromszögre $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha$, $\beta_1 = 90^\circ - \beta$, $\gamma_1 = 90^\circ - \gamma$ pozitív hegyesszögek, melyek összege 90° , és

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha_1 + \sin \beta_1 + \sin \gamma_1.$$

Ezt az összeget szemléltethetjük a következő módon: egységnyi sugarú OPQ negyedkörbe rajzoljuk be az α_1 , ill. β_1 nagyságú POA , AOB szögeket (1. ábra).



Ekkor $BOQ = \gamma_1$, és a POA , AOB , BOQ háromszögekben a sugár alkotta oldalakra merőleges magasság hossza rendre $\sin \alpha_1$, $\sin \beta_1$, $\sin \gamma_1$, így a vizsgálandó összeg az $OPABQ$ ötszög területének kétszeresével egyenlő, tehát kisebb, mint az egységnyi sugarú félkör területe, $\pi/2$. Hegyeszögű háromszögre tehát

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma < \frac{\pi}{2} (< 1,571).$$

IV. megoldás. Alakítsuk két koszinusz összegét szorzattá:

$$\cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \leq 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

mert mindkét tényező pozitív, hiszen $\alpha/2$ és $|\beta - \gamma|/2$ hegyesszögek. Fejezzük ki $\cos \alpha$ -t is a fele akkora szög szinuszával, akkor azt nyerjük, hogy

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

A második tag nem lehet pozitív, így a bizonyítandó állításon túlmenően azt bizonyítottuk be, hogy

$$(1) \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Itt akkor érvényes az egyenlőség jele, ha egyrészt $\cos((\beta - \gamma)/2) = 1$, másrészt $\sin(\alpha/2) = 1/2$. Az első egy háromszög szögeire csak akkor teljesül, ha $\beta = \gamma$, a második akkor, ha $\alpha = 60^\circ$; ekkor az első feltétel szerint $\beta = \gamma = 60^\circ$, azaz a háromszög szabályos.

Az (1) egyenlőtlenségben tehát szabályos háromszögre egyenlőség, más háromszögekre a „kisebb” jel érvényes.

Megjegyzés. Az előző megoldás ábrája alapján finomabb elemzéssel szintén bizonyítható az (1) egyenlőtlenség hegyesszögű háromszögre, és kiterjeszthető a meggondolás nem hegyesszögű háromszögekre is.

V. megoldás. Fejezzük ki a szögek koszinuszát a koszinusz-tétel alapján az oldalakkal. Vizsgáljuk először két koszinusz összegét:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{2c} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) - \frac{(a+b)(a-b)^2}{2abc}. \end{aligned}$$

Mindhárom szögpárra felírva a megfelelő kifejezést és összeadva azokat, a pozitív tagok összegében fellép minden törttel a reciproka is, így az összeg a következőképpen alakítható tovább:

$$\begin{aligned} 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) - \\ &\quad - \frac{(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2}{2abc} = \\ &= 3 + \frac{1}{2} \left(\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ac}\right) - \\ &\quad - \frac{(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2}{2abc} = 3 - \\ &\quad - \frac{(a+b-c)(a-b)^2 + (b+c-a)(b-c)^2 + (c+a-b)(c-a)^2}{2abc} \leq 3, \end{aligned}$$

ugyanis mindegyik négyzet szorzója pozitív, mert a háromszög két oldalának az összege nagyobb, mint a harmadik oldal. Így

$$(1) \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Itt akkor áll egyenlőség, ha a fenti tört számlálójában $a - b = b - c = c - a = 0$, azaz szabályos háromszögre.

Megjegyzés: többen észrevették a bal oldal következő átalakítási lehetőségét:

$$\begin{aligned} &\frac{a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 - a^3 - b^3 - c^3}{2abc} = \\ &= \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) + 2abc}{2abc}. \end{aligned}$$

Innen Heron képletét, az $abc = 4rt$ és $t = qs$ összefüggéseket felhasználva, ahol s a kerület felét, t a háromszög területét, r és ϱ a körülírt és beírt kör sugarát jelöli, a következőt nyerjük:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{16t^2}{16rts} = 1 + \frac{\varrho}{r}.$$

Világos, hogy $\varrho < r$, amiből következik a feladat állítása. Az is belátható (trigonometria felhasználása nélkül is), hogy $\varrho \leq r/2$, amiből (1) következik.

2. feladat. Öt egész szám számtani sorozatot alkot. Akár az első négy tag köbeinek összegét vesszük, akár az utolsó négy tag köbeinek összegét, mindkétyszer a figyelembe vett tagok összege négyzetének 16-szorosát kapjuk. Határozzuk meg a számokat.

I. megoldás. Jelöljük a középső számot c -vel, a számtani sorozat különbségét d -vel, ekkor a feladat feltételei:

$$(1) \quad \begin{aligned} (c-2d)^3 + (c-d)^3 + c^3 + (c+d)^3 &= \\ &= 16(c-2d+c-d+c+c+d)^2 = 16(2(2c-d))^2, \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} (c-d)^3 + c^3 + (c+d)^3 + (c+2d)^3 &= \\ &= 16(c-d+c+c+d+c+2d)^2 = 16(2(2c+d))^2. \end{aligned}$$

A második az elsőből megkapható úgy, hogy d helyébe $-d$ -t írunk (és a tagokat fordított sorrendbe írjuk), ez felhasználható lesz az átalakítások meggyorsítására. Az (1) egyenletet rendezve és 2-vel egyszerűsítve

$$2c^3 - 3c^2d + 9cd^2 - 4d^3 = 128c^2 - 128cd + 8d^2.$$

Hasonlóan (2)-ből

$$2c^3 + 3c^2d + 9cd^2 + 4d^3 = 128c^2 + 128cd + 8d^2.$$

Vonjuk le a második egyenletből az első és osszunk 2-vel:

$$3c^2d + 4d^3 = 128cd.$$

Ez teljesül, ha $d = 0$. Ekkor (1)-ből

$$4c^3 = 256c^2, \quad c = 0 \quad \text{vagy} \quad c = 64.$$

Ha $d \neq 0$, akkor a

$$3c^2 - 128c + 4d^2 = 0$$

egyenletnek kell teljesülnie. Szorozzunk 3-mal és egészítsük ki az első két tagot teljes négyzetté:

$$(3) \quad (3c - 64)^2 + 3(2d)^2 = 2^{12}.$$

Itt, ha c egész, a bal oldal első tagja nem 0, és feltevésünk szerint a második sem. Legyen $3c - 64 = 2^k u$, $2d = 2^l v$, ahol u, v páratlan és $k, l < 6$. Nem lehet k és l különböző, mert akkor 2 alkalmas hatványának kiemelése után 1-nél nagyobb páratlan szám marad vissza, s így nem keletkezhethet a jobb oldali 2^{12} érték. Ha $k = l$, akkor az

$$u^2 + 3v^2 = 2^{12-2k} = 4^{6-k}$$

egyenlethez jutunk, amelynek páratlan u és v -ből álló megoldását keressük. Ismeretes, hogy páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékkal. Az egyenlet bal oldala szerint 8-cal osztva 4-et ad maradékkal, tehát csak úgy lehet 2-nek egy hatványa, ha egyenlő 4-gyel, azaz $k = 5$, $u = \pm 1$, $v = \pm 1$, tehát

$$3c - 64 = \pm 32, \quad 2d = \pm 32.$$

Az első egyenletből csak pozitív előjel mellett kapunk egész c -t:

$$c = 32, \quad d = \pm 16.$$

A feladat feltételeinek tehát a

$$\begin{array}{ccccc} 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 16, & 32, & 48, & 64 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 64, & 64, & 64, & 64, & 64 \\ 64, & 48, & 32, & 16, & 0 \end{array}$$

sorozatok felelhetnek meg, és a számításokat elvégezve azt találjuk, hogy ezek valóban meg is felelnek.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva az (1) egyenlet bal oldalán az első és utolsó, továbbá a második és harmadik tag összegét alakítsuk át az $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ azonosság alapján. Ekkor a bal oldal így alakul:

$$\begin{aligned} (2c-d)[(c-2d)^2 - (c-2d)(c+d) + (c+d)^2] + (2c-d)[(c-d)^2 - \\ -(c-d)c + c^2] = (2c-d)(2c^2 - 2cd + 8d^2). \end{aligned}$$

Így az egyenletet 0-ra redukálva $2(2c-d)$ -t kiemelhetünk:

$$2(2c-d)(c^2 - cd + 4d^2 - 64c + 32d) = 0.$$

Hasonlóan a (2) egyenletből

$$2(2c+d)(c^2 + cd + 4d^2 - 64c - 32d) = 0.$$

Ha $d = 2c$, akkor az előbbi egyenlet teljesül, az utóbbi így alakul:

$$(4) \quad 8c^2(19c - 128) = 0.$$

Ennek egész gyöke csak $c = 0$, amiből $d = 0$.

A $d = -2c$ esetben az előbbi egyenlet megy át (4)-be, s így újabb megoldást nem kapunk.

Ha $d \neq \pm 2c$, akkor a következő egyenletrendszernek kell teljesülnie:

$$c^2 - cd + 4d^2 - 64c + 32d = 0,$$

$$c^2 + cd + 4d^2 - 64c - 32d = 0.$$

Az egyenletek összegének felét és különbségének felét véve az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk, hiszen az utóbbiak különbsége, ill. összege az eredeti egyenleteket adja:

$$c^2 + 4d^2 - 64c = c(c - 64) + 4d^2 = 0, \quad (c - 32)d = 0.$$

Az utóbbi egyenletből vagy $c = 32$, vagy $d = 0$ kell, hogy teljesüljön. Az első esetben az előbbi egyenletből

$$4d^2 = 32^2 \quad d = \pm 16,$$

az utóbbi esetben pedig

$$c = 0, \quad \text{vagy } c = 64.$$

Ezek az előbbi megoldásban talált számtani sorozatokra vezetnek.

Megjegyzések. 1. A feltételek két ismeretlenre két egyenletet adnak, ezekből az ismeretlenekre véges sok értékpár adódik. Mint a II. megoldás mutatja, nem szükséges lényegesen kihasználni a számok egész voltát, mindössze a többi feltételeket kielégítő

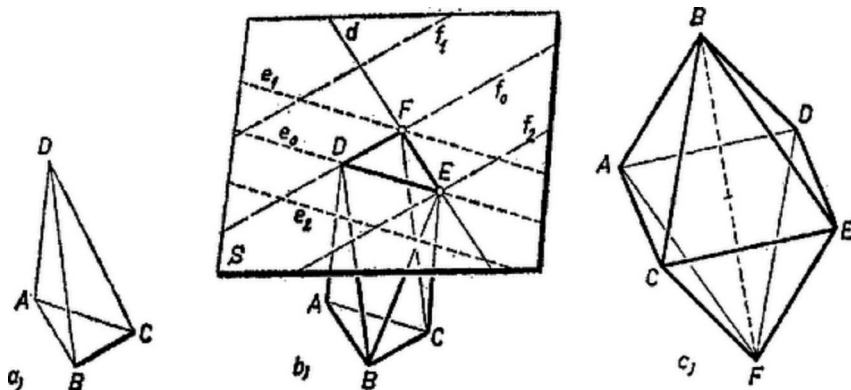
$$-384/19, -128/19, 128/19, 384/19, 640/19$$

és az ennek megfordításával keletkező sorozat kizárására.

2. Az I. megoldásban az (1) és (2)-ből keletkező (3) egyenletet oldottuk meg a keresett számok egész voltát lényegesen kihasználva. A közben felmerült $c = 32/3$, $d = \pm 16$ értékpárokhöz tartozó számtani sorozatok nem csak nem állnak egészekből, de a feladat többi feltételét sem elégítik ki. Ez nem meglepő, hiszen a megoldott (3) egyenlet nem ekvivalens az (1) és (2)-ből álló egyenletrendszerrel. Ezért az I. megoldásnál szükséges a nyert sorozatokra a követelmények teljesülésének ellenőrzése. Az előző pontban említett nem egész sorozat viszont az I. megoldásban nem jelentkezett, amit az magyaráz, hogy ott csak egész megoldást kerestünk, $c = 128/19$, $d = \pm 256/19$ -höz pedig a (3) egyenletnek nem egész megoldása tartozik.

3. feladat. Melyek azok a konvex poliéderek, amelyeknek bármely négy nem egy síkban levő csúcsa ugyanakkora térfogatú háromoldalú gúlát határoz meg?

I. megoldás. 1. Keressük először az olyan poliédereket, amelyeknek minden határlapja háromszög. Legyen a poliéder egy AB élén átmenő két határlap ABC és ABD . Az $ABCD$ háromoldalú gúla tekinthető a feladat követelményeit kielégítő poliédernek (nem választható ki több különböző csúcsnégyes, 2. a. ábra).



2. ábra

Ha a poliédernek négynél több csúcsa van, akkor minden további csúcshoz a D -n átmenő, ABC -vel párhuzamos S síkban kell lennie, mert az ABC síkban több csúcs nincs, a többi csúcs ennek a síknak ugyanazon oldalán van, mint D , és a síktól ugyanakkora távolságra, mint D , mert különben az A, B, C csúcsokkal $ABCD$ -étől különböző térfogatú gúlát alkotna. Ugyanígy benne vannak a további csúcsok a C -n átmenő, ABD -vel párhuzamos síkban is, tehát a két sík d metszésvonalán kell lenniük (2. b. ábra).

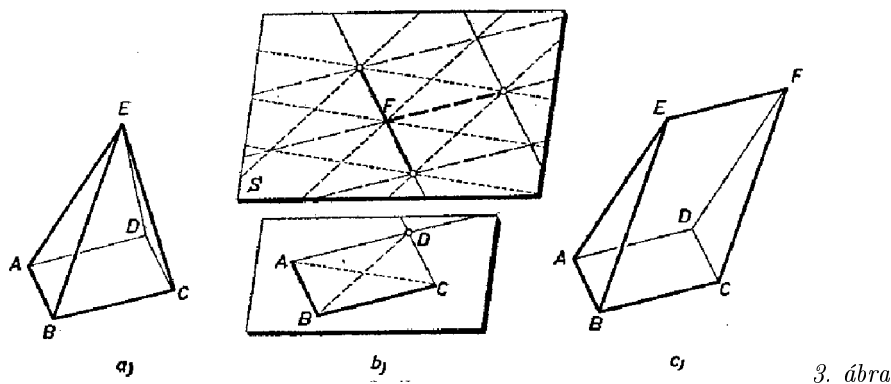
A további csúcsok ezenkívül az A, C, D csúcsokkal is akkora térfogatú gúlát alkotnak, mint $ABCD$, vagy az ACD síkban vannak. Az előbbi esetben viszont annak a két az ACD síkkal párhuzamos síknak egyikében vannak, amelyek olyan távolságra vannak az ACD síktól, mint a B csúcs. Ezek a síkok S -t egy a D -n átmenő e_0 és a két oldalán egy-egy vele párhuzamos e_1 és e_2 egyenesben metszik. Ezek párhuzamosak AC -vel, d -ből két az AB -vel egyenlő szakaszt

metszenek ki. Tekintetbe véve még azt is, hogy a további csúcsok BCD -vel is akkora térfogatú gúlát alkotnak, mint $ABCD$, vagy a BCD síkban vannak, S -ben egy D -n átmenő, BC -vel párhuzamos f_0 egyenest és a két oldalán egy-egy vele párhuzamos f_1 és f_2 egyenest kapunk, amelyek távolsága f_0 -tól akkora, mint az A csúcsé BC -től.

A d egyenes azon pontjai lehetnek csúcsai a poliédernek, amelyeken egy e_i és egy f_j egyenes is átmegegy. Az ilyen pontok az e_0 egyenes E metszéspontja és f_0 -nak az F metszéspontja. Ugyanis a DEF háromszög egybevágó CAB -vel, mert oldalai ellentétes irányban párhuzamosak, és D -ből, ill. C -ből húzott magasságai egyenlők. Ha a két pont egyikét vesszük csak hozzá A , B , C , D -hez, akkor keletkezik egy paralelogramma-lap, mi pedig most csak háromszögekkel határolt poliédert keresünk.

Az $ABCEFD$ poliédert csupa háromszöglap határolja, úgy származtatható pl. az $ABCFD$ paralelogramma-alapú gúlából, hogy azt az alaplap középpontjára tükrözzük. Nevezzük röviden kettős gúlának. Ez megfelel a feladat követelményeinek, mert akárhogy választunk ki négy csúcsot, az A , E , a B , F és a C , D szemben fekvő csúcspárok egyike köztük van, mondjuk B és F (2. c. ábra), és ehhez az $ACED$ paralelogramma két szomszédos csúcsát kell vennünk, ha nem egy síkban levő pontnégyest akarunk kiválasztani. Az így kapott háromoldalú gúla térfogata a kettős gúla térfogatának negyedrésze.

2. Keressünk most a követelményeket kielégítő olyan poliédereket, amelyeknek van háromnál több oldalú határlapja. Legyen A , B , C egy ilyen lap három egymás utáni csúcsa. Egy a síkjukban fekvő további csúcsnak rajta kell lennie az A -n átmenő, BC -vel párhuzamos egyenesen, mert egyrészt a határlap konvex, így csúcsai BC -nek azon az oldalán vannak, amelyiken A , másrészt A -val egyenlő távolságra is vannak BC -től, mert különben volna két különböző területű háromszög az ABC síkban, és ezek egy a síkon kívül fekvő csúccsal különböző térfogatú gúlákat határoznának meg. Ugyanígy adódik, hogy a C -n átmenő, AB -vel párhuzamos egyenesen is rajta kell lennie minden további csúcsnak (3. b. ábra), tehát csak ezek D metszéspontja lehet még csúcsa a határlapnak, és erre az ACD háromszög területe is egyenlő az ABC -ével. Meggondolásunk azt is mutatja, hogy egy a feladat követelményeinek megfelelő poliéder minden határlapja vagy háromszög, vagy paralelogramma.



3. ábra

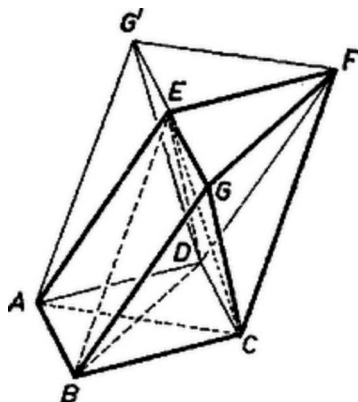
Legyen az AB élen átmenő, $ABCD$ -től különböző határlap egy további csúcsa E . Az $ABCDE$ paralelogramma-alapú gúla (3. a. ábra) megfelel a feladat követelményeinek, mert belőle háromoldalú gúla csak az alaplap valamelyik csúcsának elhagyásával keletkezik, és ezeknek a térfogata mindig a négyoldalú gúla térfogatának a fele.

Ha a testnek 5-nél több csúcsa van, akkor hasonlóan okoskodhatunk tovább, mint a csak háromszögekkel határolt poliéderek esetében. A további csúcsok csak az E -n¹ átmenő, az ABC síkkal párhuzamos S síkban lehetnek; továbbá ahhoz, hogy az $ABCD$ lap valamelyik három csúcsával alkotott gúla egyenlő térfogatúak legyenek, benne kell lenniük a CD élen átmenő, az ABE síkkal párhuzamos síkban, vagy lehetnek az ABE síkban. Ezek a síkok S -ből két az AB -vel párhuzamos egyenest metszenek ki (a 3. b. ábra folytonos vonallal kihúzott egyenesei). Az A , D , E , a B , D , E és az A , C , E csúcsokat tartalmazó csúcsnégyeseket is figyelembe véve három egyeneshármast adódik, – az előző meggondolás e_0 , e_1 , e_2 és f_0 , f_1 , f_2 egyenesének megfelelően, melyek rendre AD -vel, BD -vel, ill. AC -vel párhuzamosak (a 3. b. ábra hosszú szaggatott vonallal, apró szaggatott vonallal, ill. pontozva jelölt egyenesei). A további esetleges csúcsoknak mindegyik egyeneshármast valamelyik egyenesén rajta kell lennie.

Így azok a pontok jönnek tekintetbe poliédercsúcsokként, amelyeken négy különféleképpen jelölt egyenes megegy. Könnyen belátható, hogy ezek az egyenesek az S síkban $ABCD$ -vel egybevágó paralelogrammákat, ezek átlóit és egyes csúcsokon átmenő, átlókkal párhuzamos egyeneseket alkotnak. Három olyan pont keletkezik, amelyiken mind a négy féle egyenesből megegy át egy-egy; kettőbe E -ből az AB éllel párhuzamos, egyenlő hosszú, és egyező, ill. ellentétes irányú szakasz vezet, egybe pedig AD -vel párhuzamos, egyenlő hosszú és egyirányú szakasz. Az első két pontból csak az egyik tartozhatik a poliéderhez. Ha a poliéderen a három pont közül csak az egyik lesz csúcs, akkor háromoldalú hasábot kapunk (3. c. ábra), és minden háromoldalú hasáb megfelel a feladat követelményeinek. Ha ugyanis kiválasztunk négy csúcsot, akkor a paralelogramma lapok három közös éle közül valamelyiknek mind a két végpontja ki van választva, minden további csúcs ezek valamelyikével valamelyik paralelogramma-lapon szomszédos, tehát mindig ki van választva valamelyik paralelogramma-lap három csúcsa, és ha a négy csúcs nincs egy síkban, akkor a negyedik csúcs

¹ A 3. b. ábrán F javítandó E -re.

a paralelogrammához nem tartozó él egyik végpontja. Minden ilyen háromoldalú gúla térfogata a hasáb térfogatának harmadrésze.



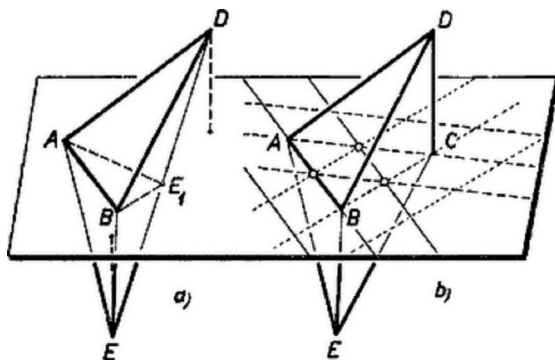
4. ábra

Megmutatjuk végül, hogy a három pont közül nem lehet kettő egyszerre csúcsa a poliédernek. Ha ugyanis az E -től AD irányban levő F pont is, az AB irányban levő G pont is csúcsa a poliédernek (4. ábra), akkor a CFG síkkal párhuzamos síkban vannak az E, B, D csúcsok (a két csúcshármast alkotó háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak), A pedig nincs egyik síkban sem, tehát pl. az $ACFG$ és $BCFG$ gúlák különböző térfogatúak. Ha G helyett az E -re vonatkozó G' tükörképe csúcsa a poliédernek, akkor az AD és BC él szerepe cserélődik meg, a DFG' és EAC síkok párhuzamosak, és B nincs egyikben sem. Így pl. a $BDFG'$ és $ADFG'$ gúlák térfogata különböző.

A feladat követelményeinek tehát a paralelogramma-alapú gúlák, a négyoldalú kettős gúlák és a háromoldalú hasábok felelnek meg, ide számíthatók továbbá a háromoldalú gúlák.

II. megoldás. 1. Keressük sorra a követelményeket kielégítő 4-, 5-, 6- stb. csúcsú poliédereket. Egy négy csúcsú poliéder csak háromoldalú gúla lehet és az megfelelőnek tekinthető.

2. Legyen $ABCDE$ egy a követelményeknek megfelelő öt csúcsú poliéder, és A, B, C, D ennek négy nem egy síkban levő csúcsa. A konvexitás miatt E nem lehet az $ABCD$ gúla belsejében vagy határán, így valamelyik három csúcsán átmenő síknak ellenkező oldalán van, mint a gúla negyedik csúcsa; legyen ez az ABC sík. A DE szakasz ABC síkkal való E_1 metszéspontja felezi a DE szakaszt, mert az $ABCD$ és $ABCE$ gúla térfogata egyenlő, így E ugyanakkora távolságra van az ABC síktól, mint D (5. a. ábra).



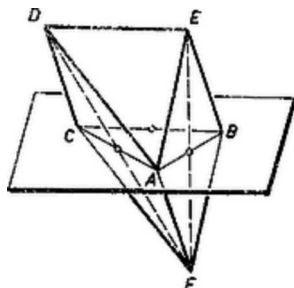
5. ábra

Vagy benne van E az ABD síkban, vagy az $ABDE$ és $ABCD$ gúlák térfogata egyenlő. Utóbbi esetben bontsuk $ABDE$ -t az ABE_1D és ABE_1E gúlákra. Ezeknek a közös lapjukra bocsátott magassága egyenlő, és egyenlő az $ABCD$ gúla D -ből húzott testmagasságával. Így az ABE_1 háromszög területe fele akkora, mint az ABC háromszögé. E_1 tehát vagy az AB oldalon van, vagy azoknak az AB -vel párhuzamos egyeneseknek az egyikén, amelyek fele akkora távolságra vannak tőle, mint a C csúcs (5. b. ábra). Hasonlóan rajta kell lennie E_1 -nek a BC oldalon, vagy annak a két vele párhuzamos egyenesnek az egyikén, amelyek BC -től féle akkora távolságra vannak, mint az A csúcs; ugyancsak teljesülnie kell az AC oldalra vonatkozó megfelelő feltételnek is. Mindhárom oldallal párhuzamos egyenes csak az AB, BC, CA oldalak felezőpontjain megy át. Ezek bármelyikére is tükrözzük D -t, paralelogramma-alapú gúlát kapunk, és az E pont keresése közben már biztosítottuk, hogy az ebből kiválasztható bármelyik háromoldalú gúlának ugyanakkora legyen a térfogata.

3. Ha kiválasztjuk egy hat csúcsú, a követelményeknek megfelelő poliéder öt nem egy síkban levő csúcsát, ezek is a követelményeknek megfelelő poliédert határoznak meg, mert minden a csúcsai közül kiválasztható pontnégyes az eredeti poliéder csúcsai közül is kiválasztható, tehát bármely négy csúcs, ha nincs egy síkban, ugyanakkora térfogatú háromoldalú gúlát határoz meg.

Eszerint, ha az $ABCDEF$ poliéder teljesíti a követelményeket, akkor az itt nem egy síkban levő csúcs meghatározta: $ABCDE$ poliéder is, tehát, mint éppen láttuk, paralelogramma-alapú gúlának kell lennie. Az F csúcs vagy a gúla valamelyik háromszöglapjának, vagy a paralelogramma-lapnak ellenkező oldalán van, mint a többi csúcs.

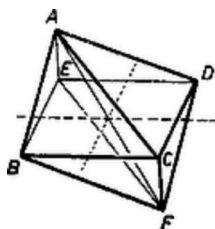
Legyen $BCDE$ a paralelogramma-lap, és F az ABC lap ellenkező oldalán, mint a gúla. Az öt csúcsú testnél követett megfontolást egyrészt az $ABCD$ gúlára és az F csúcsra, másrészt az $ABCE$ gúlára és az F csúcsra alkalmazva azt nyerjük, hogy F a D csúcsból is, és E -ből is az AB , BC , CA élek egyikének a felezőpontjára való tükrözéssel áll elő. A hat tükrökép közül csak E -nek AB felezőpontjára és D -nek AC felezőpontjára vonatkozó tükröke esik egybe, ez lehet tehát csak az F csúcs. Ez a $AEDCFB$ háromoldalú hasáb (6. ábra).



6. ábra

A háromoldalú hasáb valóban ki is elégíti a követelményeket. Ezt tudjuk már az $ABCDE$ gúlára és az $FBCDE$ négyoldalú gúlából kiválasztható háromoldalú gúák térfogata ugyanakkora, mint az $ABCDE$ -ből kiválaszthatóké, mert a két négyoldalú gúla egyenlő térfogatú, ugyanis A és F távolsága a $BCDE$ paralelogramma síkjától ugyanakkora. Végül az F pont választása szerint az $ADCFB$, ill. az $AEBFC$ poliéderekből kiválasztható háromoldalú gúák is egyenlő térfogatúak, és térfogatuk egyenlő az $ABCD$, ill. az $ABCE$ gúla térfogatával, amik az $ABCDE$ gúlának is részei. Így az összes kiválasztható háromoldalú gúák egyenlő térfogatúak.

4. Keressük most az olyan $ABCDEF$ poliédereket, amelyekben F az $ABCDE$ gúla $BCDE$ paralelogramma-lapjának van ellenkező oldalán, mint a gúla. Ezekre az AF szakasznak a $BCDE$ síkba eső F_1 felezőpontja az előzőkhöz hasonlóan vagy a BC egyenesen van, vagy attól félakkora távolságra, mint a DE egyenes; de ugyanakkor F_1 vagy rajta van DE -n, vagy félakkora távolságra van tőle, mint BC . A két feltételt egyszerre a paralelogramma BC -vel párhuzamos középvonalának pontjai elégítik ki (7. ábra).



7. ábra

Ugyanígy rajta kell lennie F_1 -nek a CD -vel párhuzamos középvonalon is: Így F_1 a paralelogramma középpontja, F az A csúcs erre vonatkozó tükröke, a poliéder kettős paralelogramma-alapú gúla.

Ez a test valóban kielégíti a feladat követelményeit, mert az $ABCDE$ gúlára ezt már tudjuk, F megkeresése pedig biztosította, hogy a kiválasztható, F -et és A -t tartalmazó háromoldalú gúák térfogata egyenlő pl. $ABCD$ -ével, továbbá ekkora az $FBCDE$ poliéderekből kiválasztható háromoldalú gúák térfogata is, hiszen ez a poliéder az $ABCDE$ poliéder tükröke. Végül A -t is, F -et is elhagyva, egy síkban levő négy pont marad.

5. Megmutatjuk, hogy hatnál több csúcsú test nem elégíti ki a követelményeket. Ha kielégítené, akkor minden 7 csúcsú rész-teste is kielégítené a követelményeket. Egy ilyen 7 csúcsú testből 6 nem egy síkban levő csúcs az előzőek szerint vagy háromoldalú hasábot, vagy négyoldalú kettős gúlát határoz meg. Utóbbi esetben a hetedik G csúcs a test egy L lapjának ellenkező oldalán van, mint maga a test. De a kettős gúlának határlapja L -nek a test középpontjára vonatkozó L' tükröke is, ami párhuzamos L -l. Ekkor azonban két különböző térfogatú háromoldalú gúlát kapunk, ha L' -höz egyszer G -t, egyszer pedig L -nek valamelyik csúcsát vesszük.

Ha 6 csúcsot kiválasztva ezek háromoldalú hasábot határoznak meg, akkor a hetedik G csúcs ismét valamelyik határlapnak ellenkező oldalán van, mint a hasáb többi csúcsa. Az utolsó megfontolás mintájára látható, hogy G nem lehet az egyik háromszöglap ellenkező oldalán, mint a hasáb. Ha viszont G egy paralelogramma-lapnak van ellenkező oldalán, mint a hasáb, akkor a 4. pont megfontolását a paralelogramma és a további két csúcs egyike, ill. a másika alkotta gúlára alkalmazva azt kapjuk, hogy G mindkét csúcsnak tükröke kellene hogy legyen a paralelogramma középpontjára, ez a két tükrökép azonban különböző. Így hasábhöz sem található hetedik csúcs.

Azt nyertük tehát, hogy a feladat követelményeinek a paralelogramma-alapú gúák, a négyoldalú kettős gúák, és a háromoldalú hasábak felelnek meg, amikhez még hozzávehetjük a háromoldalú gúákat is, más poliédert nem.