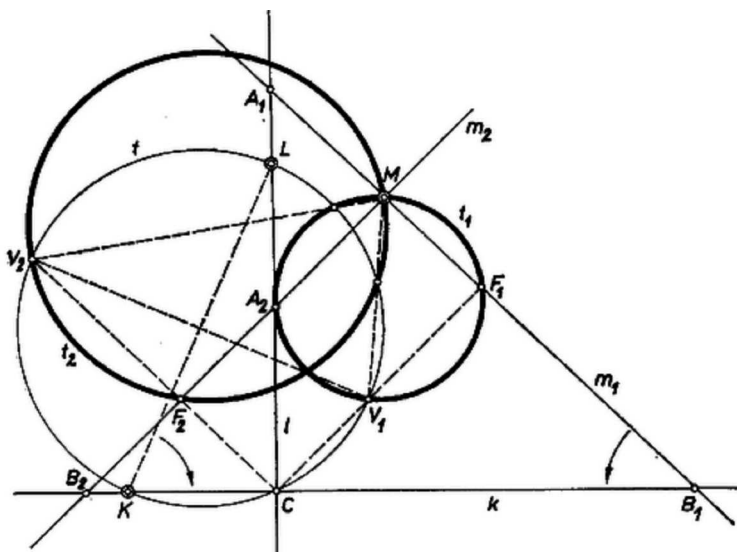


1. feladat. Adva van a síkban három különböző pont, K , L és M . Tekintsük mindazokat az egyenlő szárú derékszögű háromszögeket, melyeknek oldalegyenesei rendre átmennek az adott pontokon úgy, hogy az átfogó oldalegyenese az M ponton menjen át. Mi a mértani helye e háromszögek köré írható körök középpontjainak?



Megoldás. A keresett mértani hely egy pontját a következőképpen szerkeszthetjük meg. Húzzunk egy tetszőleges k egyenest a K ponton át, majd L -en át egy erre merőleges l egyenest, metszéspontjuk legyen C . Ezután az M ponton keresztül meghúzzuk a k -val 45° -os szöget bezáró m_1, m_2 egyeneseket. Az ábrán m_1 az óramutató járásával ellenkező irányban 45° -kal elforgatva jut k -ra, m_2 pedig megegyező irányú 45° -os forgatással. Messe k -t és l -et m_1 a B_1 , ill. A_1 pontban, m_2 pedig B_2 -ben, ill. A_2 -ben. Ekkor A_1B_1C és A_2B_2C a feladat követelményeinek megfelelő egyenlő szárú derékszögű háromszögek. A derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja, ábránkon A_1B_1 felezőpontja F_1 , A_2B_2 felezőpontja F_2 , mindkettő hozzátartozik a keresett mértani helyhez.

Azt keressük, milyen alakzatot ír le F_1 és F_2 , míg k a K körül – s így l az L körül, m_1 és m_2 pedig az M körül – egyszer körülfordul.

Az átfogók felezőpontjait A_1 és B_1 , ill. A_2 és B_2 kijelölése nélkül is megkaphatjuk, ugyanis C a KL szakasz fölé írt t Thalesz-körön van, CF_i pedig ($i = 1, 2$) – egyenlő szárú háromszögről lévén szó – felezi az A_iCB_i szöget és merőleges m_i -re, tehát F_i -t M merőleges vetülete adja a k, l egyenespár megfelelő f_i szögfelezőjén. E szögfelezők minden helyzetben felezik t -nek a szárak közé eső KL félkörívét is, és így átmennek t -nek a KL -re merőleges V_1V_2 átmérője valamelyik végpontján (az ábrán CF_1 átmegy V_1 -en, CF_2 pedig V_2 -n. Ezért – bármilyen is a C, F_i, V_i pontok sorrendje –, mindig fennáll: $MF_1C \angle = MF_1V_1 \angle = 90^\circ$ és $MF_2C \angle = MF_2V_2 \angle = 90^\circ$. Így a k különböző helyzeteihez tartozó F_1 pontok a V_1M , mint átmérő fölé rajzolt t_1 Thalesz-körön vannak, az F_2 pontok pedig a V_2M átmérő fölé rajzolt t_2 Thalesz-körön.

Hátra van még annak megvizsgálása, hogy a két utóbbi Thalesz-kör minden pontja hozzátartozik-e a mértani helyhez. Legyen a t_1 kör egy M -től és V_1 -től különböző pontja X_1 , és kössük össze X_1 -et V_1 -gyel és M -mel. Ekkor $MX_1V_1 \angle = 90^\circ$; továbbá, miután V_1 rajta van a t körön, az X_1V_1 egyenes e kört általában még egy C pontban metszi. Így a CK, CL és X_1M egyenesek egy derékszögű egyenlő szárú háromszöget alkotnak, és e háromszög köré írt kör középpontja éppen a felvett X_1 pont. Ugyanis a CX_1 és CK egyenesek kisebbik szöge 45° , mert az egyenesek között t -nek valamelyik V_1K íve fekszik, vagyis a kör negyede vagy háromnegyede, így a CK -ra merőlegesen álló CL egyszersmind tükrös párja is CK -nak CX_1 -re, továbbá X_1M önmagának tükörképe CX_1 -re, hiszen merőleges rá; végül X_1 az így nyert háromszög átfogójának és szimmetriatengelyének közös pontja. – X_1 gyanánt V_1 is vehető, ekkor X_1V_1 egyenes gyanánt az $X_1M = V_1M$ átmérőre emelt merőleges, t_1 -nek V_1 -beli érintője veendő, hasonlóan $X_1 = M$ esetén az M -beli érintőt vesszük X_1M gyanánt. – Hasonlóan előfordulhat, hogy X_1V_1 a t kört másodszor éppen K -ban, vagy L -ben metszi, ekkor az egyik befogó egyenese a KL egyenes, a másiké pedig a talált metszéspontban t -hez húzott érintő. C gyanánt adódhat maga V_1 is, ha ti. X_1V_1 éppen érinti a t kört.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a t_1 kör minden pontja a mértani helyhez tartozik. Hasonlóképpen az F_2 pontok t_2 körének minden pontja ugyancsak hozzátartozik a mértani helyhez, mert megfontolásaink V_1 helyén V_2 -vel változtatlanul érvényesek. A keresett mértani hely tehát a t_1 és t_2 körökből áll.

Megjegyzés. Lehetséges, hogy az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög ponttá zsugorodik össze, és pedig akkor és csak akkor, ha C azonosnak adódik X_1 -gyel, hiszen a szóban forgó körülírt kör sugara X_1C . Ilyen X_1 mindig van: t és t_1 -nek V_1 -től különböző közös pontja, ill. ha t és t_1 érintkeznek, akkor maga V_1 .

2. feladat. Egy tört számlálója és nevezője egyaránt kétjegyű egész szám, és a számláló tízeseinek a száma egyenlő a nevező egyeseinek számával. Elhagyva a közös jegyet, a megmaradt egyjegyű számok hányadosa egyenlő az eredeti tört értékével. Melyik ez a tört?

Megoldás. A feladat olyan a, b, c számjegyek keresését kívánja, amelyekre

$$\frac{10a + b}{10c + a} = \frac{b}{c}.$$

Itt a és c nem 0, mert a bal oldal kétjegyű számok hányadosa, de b sem lehet 0, mert akkor a jobb oldal 0, tehát $a = 0$ kellene hogy legyen. A törtet eltávolítva

$$10ac + bc = 10bc + ab,$$

amit, a 10-zel szorzott tagokat egy oldalra rendezve, így írhatunk:

$$(1) \quad 10(a - b)c = (a - c)b.$$

Itt, ha $a - b$ nem 0, akkor vagy $a - c$ egyenlő 5-tel, vagy -5 -tel, vagy $b = 5$, mert mindkét tényező abszolút értéke kisebb 10-nél.

1) Ha $a - b = 0$, akkor $a - c = 0$, vagyis $a = b = c$, és ez nyilván minden pozitív a számjegyre megoldása a feladatnak.

2) Ha $a - c = -5$, $a = c - 5$, akkor (1)-ből (-5 -tel egyszerűsítve)

$$2(b + 5 - c)c = b.$$

Ha $c \leq 5$, akkor a bal oldal nagyobb, mint b , ha pedig $c > 5$, akkor a bal oldal 10-nél nagyobb, tehát nem lehet egy számjeggyel egyenlő.

3) Ha $a - c = 5$, $a = c + 5$, akkor (1)-ből

$$2(c + 5 - b)c = b, \quad (2c + 1)b = 2c(c + 5).$$

Innen

$$b = c + 5 - \frac{c + 5}{2c + 1} = c + 5 - \frac{2c + 1 + 9}{2(2c + 1)} = c + \frac{9}{2} - \frac{9}{2(2c + 1)}.$$

Ez csak úgy adhat egész számot, ha $2c + 1$ osztója a 9-nek. Ez $c = 1, 4$ esetekben következik be. Ekkor b értéke 4, ill. 8, $a = c + 5$ értéke pedig 6, ill. 9. Az ezekkel felírt törtek

$$\frac{64}{16} = \frac{4}{1}, \quad \frac{98}{49} = \frac{8}{4}$$

valóban megfelelnek a feladat követelményeinek.

4) Végül, ha $b = 5$, (1)-ből

$$2(a - 5)c = a - c, \quad (2c - 1)a = 9c.$$

Ebből

$$a = \frac{9c}{2c - 1} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2(2c - 1)}.$$

Ez akkor pozitív egész, ha $2c - 1$ a 9 pozitív osztója, tehát $c = 1, 2, 5$. Az a -ra adódó értékek 9, 6, 5. Ezek közül a harmadik értékűhármas az 1) alatt szerepelt megoldások egyikét adja, a másik kettőhöz tartozó törtekre

$$\frac{95}{19} = \frac{5}{1}, \quad \frac{65}{26} = \frac{5}{2},$$

tehát ezek is megfelelnek a feladat követelményeinek; így 9 érdektelen megoldás mellett további 4 megoldása van a feladatnak.

Megjegyzések. Több versenyző a követelmény alapján kifejezte valamelyik számjegyet a másik kettővel, majd az utóbbiak minden lehetséges értékpárja mellett azt vizsgálta, lehet-e számjegy a kifejezés értéke. Látjuk, hogy a feladat kevesebb próbával is megoldható. Számosan egy megfelelő számjegyhármas megtalálása után abbahagyták a próbálgatást.

3. feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$(1) \quad x^2 - xy + y^2 = 2, \\ (2) \quad x^3 - y^3 = 4.$$

Megoldás. Alkalmas új ismeretlenek bevezetése útján feladatunkat egyszerűbb egyenletekből álló egyenletrendszer megoldására vezethetjük vissza. Legyen pl.

$$x - y = u, \quad \text{és} \quad xy = v,$$

akkor egyenleteink így alakulnak át:

$$(1a) \quad x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy = u^2 + v = 2,$$

$$(2a) \quad x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = u^3 + 3uv = 4.$$

Az első egyenletből v kifejezését a másodikba helyettesítve:

$$u^3 + 3u(2 - u^2) = 4.$$

Rendezés és egyszerűsítés után a bal oldalt szorzattá alakíthatjuk:

$$u^3 - 3u + 2 = 0, \\ (u^3 - u) - 2(u - 1) = (u - 1)[u(u + 1) - 2] = (u - 1)(u^2 + u - 2).$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát vagy $u - 1 = 0$, $u_1 = 1$, vagy $u^2 + u - 2 = 0$. Az utóbbi egyenlet két gyöke $u_2 = 1$ és $u_3 = -2$. Az u -khoz tartozó v -ket az (1a) egyenletből számíthatjuk ki,

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = -2.$$

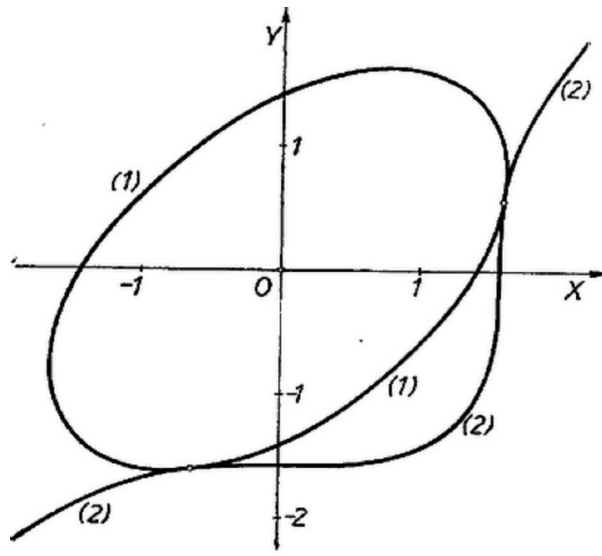
Az $u_1 = 1$, $v_1 = 1$ gyökrendszerhez tartozó x és y értékeket az

$$u = x - y = 1, \quad v = xy = 1$$

egyenletekből kiszámítva

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \\ x_2 = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Az u_2 , v_2 gyökpárból nem kapunk új megoldást. Az $u_3 = -2$, $v_3 = -2$ gyökpárral adódó $x - y = -2$, $xy = -2$ egyenletrendszernek nincs valós megoldása.



Megjegyzés. Bizonyítás nélkül megemlíttük, hogy (1) képe a derékszögű koordináta-rendszerben olyan ellipszis, amelynek középpontja az origó, szimmetria tengelyei a koordináta-tengelyekkel 45° -os szöget zárnak be, nagy tengelye az I. és III. síknegyedekben halad, (2) képe pedig egy ún. harmadrendű görbe. A mindkét egyenletet kielégítő x , y számpárokhoz tartozó pontok a görbéknek közös pontjai, ez esetben érintkezési pontok, bennük a két görbének közös az érintője is.