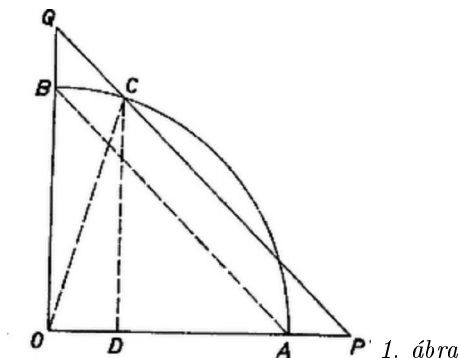


**1. feladat.** Adott egy negyedkör, amelyet az  $OA$  és  $OB$  sugarak határolnak. Húzzunk az  $AB$  húrral párhuzamos, a negyedkört metsző egyenest és jelöljük ennek a negyedkörrel alkotott egyik metszéspontját  $C$ -vel, az  $OA$  és  $OB$  félegyenesekkel alkotott metszéspontjait pedig  $P$ -vel és  $Q$ -val. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad AB^2 = PC^2 + QC^2.$$

**I. megoldás.** Elég megmutatni, hogy a megfelelő összefüggés fennáll a szóban forgó szakaszoknak az  $OA$  egyenesen levő vetületére. Ugyanis mindegyik vetület ugyanannyi ad része (esetünkben  $1/\sqrt{2}$ -szöröse) az eredeti szakasznak, és így a szakaszokat a vetületekkel helyettesítve (1) mindkét oldala ugyanazzal, a mondott arány négyzetével szorozódik.

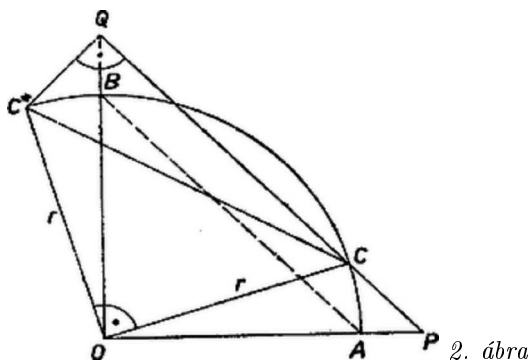


Az  $AB$ ,  $CP$ ,  $CQ$  szakaszok vetülete  $AO = r$ , (a kör sugara),  $DP$  és  $DO$ , továbbá, mivel a  $CDP$  háromszög egyenlő szárú, így  $DP = DC$ , tehát a vetületekre

$$DP^2 + DO^2 = DC^2 + DO^2 = OC^2 = r^2 = OA^2,$$

mivel a  $CDO$  háromszög derékszögű. Fennáll tehát a bizonyítandó összefüggés is.

**II. megoldás.** Forgassuk el a kör középpontja körül a  $QP$  szakaszt a  $C$  ponttal együtt  $90^\circ$ -kal úgy, hogy a  $P$  pont a  $Q$  pontba kerüljön, és az elforgatott  $C$  pontot jelöljük  $C^*$ -gal. Ekkor a  $C^*CQ$  háromszög  $Q$ -nál fekvő szöge derékszög, és  $QC^* = PC$ . Másrészt a  $C^*OC \angle = 90^\circ$ , így  $C^*C = r\sqrt{2}$ . Eszerint az (1) összefüggés éppen a  $C^*CQ$  derékszögű háromszögre felírt Pythagoras-tétel.



*Megjegyzés.* Állításunk akkor is érvényes, ha megrajzolva a teljes  $O$  középpontú,  $r$  sugarú kört, az  $AB$ -vel párhuzamos szelő ezt a negyedkörtől kívül eső  $C$  pontban metszi. Mindkét előbbi megoldás alkalmas ennek bebizonyítására is.

**2. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$$

kifejezés mindig pozitív, ha  $a$ ,  $b$  és  $c$  különböző számok, és közülük az „ $a$ ” a legnagyobb, és  $a$  pedig a legkisebb.

**I. megoldás.** A törteket közös nevezőre hozzuk és összeadjuk. Elvégezve a lehetséges összevonásokat nyerjük, hogy

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

A jobb oldali tört számlálója ilyen alakban írható:

$$-\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2].$$

A szögletes zárójelben a négyzetösszeg pozitív, tehát maga a számláló negatív. De a nevező első két tényezője pozitív, a harmadik negatív, ezért a nevező szintén negatív, így a tört értéke pozitív.

**II. megoldás.** Az  $a > b > c$  kikötés miatt az első két tört pozitív, a harmadik negatív. A harmadik tört nevezőjének abszolút értéke  $a - c = (a - b) + (b - c)$ , az első két nevező összege; eszerint reciproka, vagyis a harmadik tag abszolút értéke kisebb  $\frac{1}{a-b}$  és  $\frac{1}{b-c}$  mindegyikénél, még inkább kisebb e két tört összegénél.

**3. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(2) \quad p + q + r = 1$$

és

$$(3) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0,$$

akkor

$$(4) \quad a^2 + b^2 + c^2 = (pa + qb + rc)^2 + (qa + rb + pc)^2 + (ra + pb + qc)^2.$$

**Megoldás.** A jobb oldalon elvégezve a négyzetreemelést, a keletkező 9 négyzetes tag és 9 kettős szorzat így csoportosítható:

$$(5) \quad \begin{aligned} & a^2(p^2 + q^2 + r^2) + b^2(p^2 + q^2 + r^2) + c^2(p^2 + q^2 + r^2) + \\ & + 2ab(pq + qr + rp) + 2bc(pq + qr + rp) + 2ca(pq + qr + rp). \end{aligned}$$

A feltételi egyenlőségekből meghatározzuk a  $p^2 + q^2 + r^2$  négyzetösszeg és a  $pq + qr + rp$  szorzatösszeg értékét. Miután (3) értelmében  $p$ ,  $q$  és  $r$  egyike sem nulla, (3)-at végigszorozhatjuk  $pqr$ -rel:

$$(6) \quad qr + rp + pq = 0.$$

Továbbá emeljük négyzetre (2)-t:

$$p^2 + 2pq + q^2 + 2pr + 2qr + r^2 = 1.$$

Ámde a bal oldalon a kettős szorzatok összege (6) szerint 0, így

$$(7) \quad p^2 + q^2 + r^2 = 1.$$

(6) és (7) értékét behelyettesítve (5)-be, ott a négyzetes tagok együtthatója 1, a kettős szorzatok pedig kiesnek, és így a kifejezés azonosan egyenlő (4) bal oldalával.

**Lőrincz Pál**