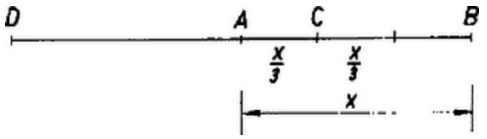
**1. feladat.** *Egy ember az A HÉV-megállónál várakozik. Elunja a várakozást és elindul a következő B HÉV-megálló felé. Mikor az A és B közötti út 1/3-át megtette, megpillantja az A megálló felé* 30 km/óra *sebességgel közeledő szerelvényt. Ha teljes sebességgel futni kezd akár az A, akár a B megálló felé, éppen eléri a vonatot. Mekkora az a maximális sebesség, amellyel futni tud?*

**I. megoldás.** Legyen a keresett sebesség $v$ km/óra, az $AB$ útszakasz hossza $x$ km, és jelölje $C$ azt a pontot, amelyből az ember megpillantja a vonatot.




*1. ábra*

Ekkor $CA = x/3$, $CB = 2x/3$, és az ezen utak megtételéhez szükséges idők $x/3v$ óra, ill. $2x/3v$ óra. Ugyanennyi idő alatt ér a vonat is a megpillantáskor volt helyzetéből $A$-ba, $B$-be, ezért a vonatnak az $AB$ út megtételéhez szükséges ideje e két idő különbsége: $x/3v$ óra. Ez az idő a vonat sebességével kifejezve $x/30$, így a két kifejezés egyenlőségéből $v = 10$. Emberünk maximálisan 10 km/óra sebességgel tud futni.

**II. megoldás.** A feladat egyenlet nélkül is megoldható. Mire az ember $C$-ből eljut $A$-ba, addigra a vonat is $A$-ba ér. Így ha az ember $B$ felé fut, az alatt az idő alatt, amíg a vonat $A$-ba ér, ő ugyanakkora távolságot tesz meg, mint amennyire $C$ az $A$-tól van, vagyis az $AB$ út harmadát. Ezért $B$-ig már az út 2/3 részét megtette, csak az 1/3 rész van hátra. Mialatt ezt a harmadot megteszi, a vonat $A$-ból $B$-be jut, vagyis megteszi az egész $AB$ távolságot. Így az ember sebessége a vonat sebességének harmadrésze, azaz 10 km/óra.

*Megjegyzések.* 1. A megoldásból nem adódik ki a tekintetbe vett útszakaszok hossza. A közölt egyetlen összefüggés csak a keresett ismeretlen meghatározására elegendő.

2. Az viszont kiderül a feladat feltételeiből – és ez is felhasználható a megoldáshoz –, hogy a vonat a megpillantáskor (az ábrán $D$) annyira van $A$-tól, mint $A$ van $B$-től, hiszen az utas $B$-ig futva kétannyi utat tesz meg, mint ha $A$-ba fut, így a vonat $B$-ig, ill. $A$-ig megtett útjai közt is ez az arány.

**2. feladat.** *Írjuk fel egy szám jegyeit fordított sorrendbe. Mutassuk ki, hogy az így kapott (tízes számrendszerbeli) szám nem lehet az eredeti szám kétszerese.*

**I. megoldás.** Legyen az eredeti $N$ szám első (legmagasabb helyértékű) jegye $a$, utolsó jegye $b$, vagyis $N = \overline{a\ldots b}$, és tegyük fel az állítással ellentétben, hogy kétszerese egyenlő a jegyek fordított sorrendű felírása útján adódó számmal: $2N = \overline{b\ldots a}$. Mivel $2N$ páros szám, azért utolsó jegye, $a$ is páros. Másrészt $2N$ ugyanannyi jegyű, mint $N$, ezért $a$ kisebb 5-nél, így $a$ csak 2 vagy 4 lehet.

Azonban mindkét kiindulás lehetetlenségre vezet. Ha $a = 2$, akkor $2N$ első jegye 4 vagy 5, az $a$ utáni számjegy 2-vel való szorzásakor esetleg fellépő, átviendő maradék szerint. Így viszont $2N$ vagy 8-asra, vagy 0-ra végződik, tehát nem 2-re. Hasonlóan $a = 4$-ből $b = 8$, vagy 9, és így $2N$ utolsó jegye 6 vagy 8, nem pedig 4. – Nem lehetséges tehát, hogy egy szám jegyeit fordított sorrendben leírva a szám kétszeresét kapjuk.

**II. megoldás.** Célhoz juthatunk párossági meggondolások nélkül is. Láttuk, hogy $b = 2a + 1$, vagy $b = 2a$ attól függően, hogy a 2-vel való szorzás utolsó előtti lépésében lépett-e fel maradék vagy nem. ($b = 2a + 2$ már lehetetlen számjegy, mert az ezzel kezdődő számokat 2-vel osztva a hányados $(a + 1)$-es jeggyel kezdődik, nem $a$-val.) A szorzás első lépésében is két eset lehetséges aszerint, hogy $2b$ eléri, esetleg meg is haladja a 10-et, vagy nem. Miután mindig $2b < 20$, az utóbbi esetben $2b = a$, az előbbiben $2b = a+10$. $b$ előbbi kifejezéseit ide behelyettesítve $a$-ra egyismeretlenes egyenleteket kapunk:

$$4a + 2 = a, \qquad 4a + 2 = a + 10,$$
$$4a = a, \qquad 4a = a + 10.$$

Ezekből $3a$ értéke vagy $-2$, vagy 0, vagy 8 vagy 10. Így számjegy gyanánt használható – ti. 0 és 9 közti egész – $a$-érték csak a 0, de $N$ első jegye gyanánt ez sem fogadható el. Ezek szerint valóban nincs a szóban forgó tulajdonsággal bíró szám.

**3. feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex négyszögben van olyan oldal, amely kisebb a hosszabbik átlónál.*

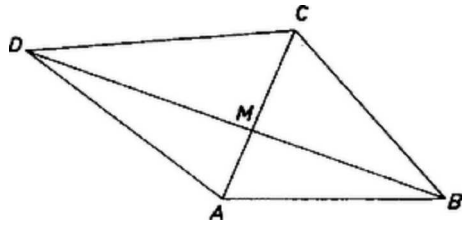
**I. megoldás.** Jelöljük egy $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontját $M$-mel (2. ábra). Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az $ABM$, $BCM$, $CDM$, $DAM$ háromszögekre

$$AB < AM + BM, \qquad BC < BM + CM,$$
$$CD < CM + DM, \qquad DA < DM + AM.$$

A négy egyenlőtlenséget összeadva

$$AB + BC + CD + DA < 2(AM + BM + CM + DM) = 2(AC + BD).$$

A bal oldal nem kisebb a legkisebb oldal 4-szeresénél, a jobb nem nagyobb a nagyobb átló négyszeresénél, s így valóban a legkisebb oldal kisebb a nagyobbik átlónál.




*2. ábra*

**II. megoldás.** Vizsgáljuk pl. a négyszög $AB$ oldalát és $AC$ átlóját. Ha $AB < AC$, akkor a feladat állítása érvényes: a legkisebb oldal biztosan kisebb a nagyobbik átlónál.

Ha $AB \geq AC$, akkor megmutatjuk, hogy az $AB$-vel szemben levő oldal kisebb a másik átlónál: $CD < BD$. A feltételből ugyanis következik (az $ABC$ háromszögre alkalmazva az oldalak és szögek közti összefüggést), hogy

$$ACB\sphericalangle \geq ABC\sphericalangle.$$

Másrészt konvex négyszög átlói két részre osztják a négyszögnek a végpontjaikban levő szögeit, így

$$DCB\sphericalangle > ACB\sphericalangle \geq ABC\sphericalangle > DBC\sphericalangle.$$

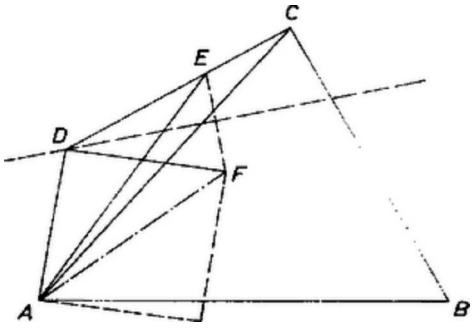
Ebből ismét az oldalak és szögek közti összefüggés alapján nyerjük, hogy $BD > CD$, amint állítottuk. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*Megjegyzések.* 1. A feladat állításánál többet is bizonyítottunk: konvex négyszög bármelyik szemben fekvő oldalpárjának egyik tagja kisebb valamelyik átlónál (tehát a hosszabb átlónál minden esetre kisebb), s így legalább két oldal kisebb, mint az átlók hosszabbika. Azt is látjuk, hogy ha csak két ilyen oldal van, ezek szomszédosak.

2. A megoldásból az is következik, hogy ha valamelyik oldal nem kisebb egyik átlónál sem, akkor a szemben fekvő oldal mindkét átlónál kisebb.

3. A rövidebb átlóra a bizonyítás azt adja, hogy ahány oldal nem kisebb a rövidebb átlónál, legalább annyi a hosszabbik átlónál kisebb oldal van.

**III. megoldás.** Legyen a négyszög legnagyobb szöge az $ADC$ szög (3. ábra). Ez legalább $90°$, különben ugyanis a szögek összege nem lehetne $360°$. Így az $ADC$ szög nagyobb az $ADC$ háromszög másik két szögénél. Ezért az $ADC$ szöget bezáró $DA$ és $DC$ oldalak – egyszersmind a négyszögnek is oldalai – kisebbek a háromszög $AC$ oldalánál, ami a négyszögnek átlója. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.




*3. ábra*

*Megjegyzések.* 1. A mondottakból következik, hogy ha egy konvex négyszögben két szemben levő szög egyike sem hegyesszög, akkor mind a négy oldal kisebb a hosszabb átlónál.

2. Megmutatjuk, hogy minden konvex négyszögnek a legkisebb oldala fölé négyzetet rajzolva még ennek az átlója sem nagyobb a hosszabb átlónál.

Legyen továbbra is $ADC\sphericalangle \geq 90°$, válasszuk a betűzést úgy, hogy álljon $DC \geq DA$, mérjük rá a $DA$ szakaszt $D$-től a $DC$ félegyenesre, és legyen a végpont $E$. Ekkor $AE \leq AC$, mert az $ADE$ háromszögből, amennyiben $E$ különbözik $C$-től,

$$AEC\sphericalangle = ADE\sphericalangle + DAE\sphericalangle > ADE\sphericalangle \geq 90°,$$

tehát az $AEC$ háromszögben $E$-nél tompaszög van, $AC > AE$. Ha $ADE\sphericalangle = 90°$, akkor $AE$ az említett négyzet-átló, s így állításunk helyes. Ha $ADE\sphericalangle > 90°$, akkor állítsunk merőlegest $D$-ben $AD$-re és mérjük fel erre a $DF = DA$ szakaszt, azon az oldalon, amelyen a négyszög fekszik. Így $DF = DE$, tehát $D$ rajta van az $EF$ szakasz felező merőlegesén. $A$ pedig e merőlegesnek $F$-et tartalmazó partján van, mert a felező merőlegesből $D$ körüli, hegyesszögű forgással jutunk $DF$-be (ti. akkorával mint $DE$-be), onnan tovább $90°$-os forgással $DA$-ba, és a két forgás összege kisebb $180°$-nál. Ez esetben $AF$, a kérdéses négyzetátló, kisebb $AE$-nél. Ha pedig $E$ egybeesik $C$-vel, akkor $AF \leq AE = AC$. Ezzel igazoltuk állításunkat.

Pythagorász tételéből tudjuk, hogy az $AD$ oldalú négyzet átlójának hossza $AD\sqrt{2}$. Eszerint konvex négyszög két, tompaszöget vagy derékszöget bezáró oldala közül a kisebbik $\sqrt{2}$-szöröse kisebb valamelyik átlónál vagy egyenlő vele. [1]

**IV. megoldás.** Az átlók $M$ metszéspontja mindegyik átlót két részre osztja (2. ábra). Válasszuk a betűzést úgy, hogy $DM$ a négy szakasz legnagyobbika legyen, vagy a legnagyobbak egyike. Ekkor

$$AB < AM + BM \leq DM + BM = BD,$$

tehát van olyan oldal, amelyik kisebb egy átlónál, s így a legkisebb oldal bizonyosan kisebb a nagyobbik átlónál.

*Megjegyzések.* 1. A választott jelölések mellett fennáll

$$BC < BM + CM \leq BM + DM = BD$$

is, tehát *konvex négyszögnek mindig van két szomszédos oldala, amelyek rövidebbek a közös végpontjukból induló átlónál.*

2. Kiindulhatunk a legkisebb átlórészből is. Ha pl. $AM$ nem nagyobb a $BM$, $CM$, $DM$ szakaszok egyikénél sem, akkor

$$AB < AM + BM \leq BM + DM = BD$$

és

$$AD < AM + DM \leq BM + DM = BD.$$

Így azt kaptuk, hogy *konvex négyszögben mindig van két szomszédos oldal, amelyek kisebbek a velük háromszöget alkotó átlónál.*

A két oldalpár közös végpontjai csak akkor lehetnek szemközti csúcsok, ha ugyanaz a szakasz szerepel a legrövidebbek közt és a leghosszabbak közt is, vagyis ha $M$ a két átlót csupa egyenlő részekre osztja (téglalap esetén). Ekkor bármelyik szomszédos oldalpár rendelkezik mindkét tulajdonsággal. Egyébként vagy mindkét állítás ugyanarról az oldalpárról szól, vagy ugyanarról az átlóról (és a szóban forgó két oldal közül egy oldal kétszer nyer említést).

A két állításból így az is következik, hogy *egy konvex négyszögnek vagy van két szomszédos oldala, amelyek mindegyike kisebb mindkét átlónál, vagy három oldala kisebb a hosszabb átlónál.*

**Fried Ervin, Surányi János**

[1] Lásd az 1961. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny 1. feladatát, K. M. L. 24 (1962) 98. o.