1. feladat. *Egy üzemben „a” munkás dolgozott. Egy nap b munkás mezőgazdasági munkára ment el az üzemből. Hány százalékkal kell emelniük az ott maradóknak napi átlagos teljesítményüket, ha teljesíteni akarják az eredeti termelési tervet?*

I. megoldás. Ha az egész munkát az eredeti a munkás végzi el, mindegyikükre a munka $1/a$ része jut. Mivel a kérdéses napon csak $a-b$ munkás dolgozik, ezekre egyenként az egy napi munka $1/(a-b)$ része jut aznap. Így minden dolgozónak az egész munka

$$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{a(a-b)}$$

részével kell többet termelnie. Ez a rész a terv szerinti $1/a$-nak

$$100\frac{b}{a(a-b)}:\frac{1}{a}=\frac{100b}{a-b}$$

százaléka. Mivel nyilván $a>b>0$, azért a kapott eredmény pozitív.

II. megoldás. Vegyük a munka mértékegységének 1 munkás 1 napi teljesítményét az eredeti terv szerint. Így az eltávozók kieső munkája naponta b egység, ebből a visszamaradó $a-b$ dolgozó mindegyikére naponta $b/(a-b)$ egységnyi többletmunka jut, ennyivel kell emelniük napi teljesítményüket. Ez a terv szerinti, napi 1 egységnyi teljesítménynek $\dfrac{100b}{a-b}$ százaléka.

2. feladat. *Két autó, „A” és B elindul egyik városból a másikba. Az első 5 percben egyenlő utat tettek meg. Ekkor B motorhiba miatt kénytelen volt sebességét 2/5-ére csökkenteni, és így 15 perccel a továbbra is egyenletes sebességgel haladó „A” után ért a célba. Ha a hiba 4 km-rel távolabb következik be, akkor B csak 10 perccel „A” után ért volna a célba. Milyen távol van a két város?*

I. megoldás. Jelöljük az autók induló pontját I-vel, célját C-vel, a hiba helyét H-val és a feltevés szerinti hiba helyét H^*-gal. Legyen továbbá A sebessége percenként v km, a teljes IC út megtételéhez szükséges ideje x perc. Ekkor B-nek az első 5 perc utáni út megtételére, mivel sebességét a $2/5$-ére csökkentette, az A számára szükséges $x-5$ perc helyett ennek $5/2$-ére, $(5x-25)/2$ percre van szüksége, és ez 15 perccel több, mint amennyi alatt A elért C-be, tehát

$$\frac{5x-25}{2}=x-5+15.$$

Ebből A menetideje

$$x=15\,\text{perc},$$

és a teljes út hossza $15\,v$ km.

Ha B motorhibája 4 km-rel távolabb következik be, akkor az addig megtett út $IH^*=5v+4$ km. A hiba után hátralevő út $H^*C=15\,v-(5v+4)=10\,v-4$ km. Ezt A $(10\,v-4)/v$ perc alatt, B pedig

$$\frac{10v-4}{2v/5}=\frac{25v-10}{v}$$

perc alatt teszi meg. Az utóbbi az előbbinél 10 perccel hosszabb, vagyis

$$\frac{25v-10}{v}=\frac{10v-4}{v}+10,$$

amiből $v=1{,}2$ km/perc.

Most már a két város távolsága $v\cdot x=1{,}2\cdot 15=18$ km.

Mindezek szerint B motorhibája $IH=1{,}2\cdot 5=6$ km út után következett be, és akkor még $HC=12$ km útja volt hátra. B új sebessége 0,48 km/perc lett, ezzel a HC szakaszt $12:0{,}48=25$ perc alatt tette meg. Teljes menetideje $5+25=30$ perc, késése A-hoz képest valóban 15 perc. – Ha viszont a hiba csak $6+4=10$ km út után lépett volna fel, akkor B teljes menetideje hasonlóan

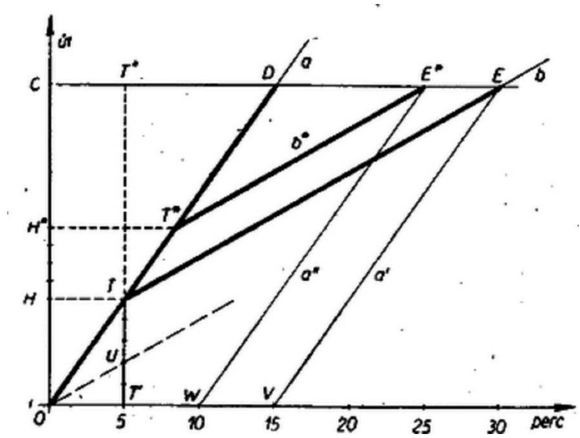
$$\frac{10}{1{,}2}+\frac{8}{0{,}48}=\frac{25}{3}+\frac{50}{3}=25\text{ perc},$$

és ez valóban csak 10 perccel hosszabb A idejénél.

II. megoldás. Elegendő csak a B autóról beszélnünk. Ez az egész úton kezdeti sebességével haladva 15 perccel hamarabb tenné meg az utat, mint úgy, hogy 5 perc után $2/5$-ére csökkentette sebességét, – és 10 perccel előbb, mint ha ez a sebességcsökkenés csak 4 km-rel távolabb következik be. Eszerint 4 km út megtételéhez kell 5 perccel hosszabb idő a csökkentett sebességgel, mint az eredeti sebességgel. Így a 15 perc késés 12 km úton következik be, tehát az első 5 percnyi autózás után még ennyit kellett megtenni.

Könnyen kiszámíthatjuk másrészt az első 5 perc után megtett úthoz szükséges időt is. Ezt az utat B $5/2$-szer akkora idő alatt tette meg csökkentett sebességgel, mint amennyi az indulási sebesség mellett lett volna szükséges, így a késés az eredetileg szükséges idő 3/2-szerese (másfélszer akkora). Az eredeti sebességgel tehát ezt az utat 10 perc alatt tette volna meg.

Mivel megállapítottuk, hogy ez az út 12 km, így az első 5 perc alatt 6 km-t hagyott B a háta mögött; az egész útja tehát 18 km volt.



Megjegyzés. A fenti eredmények ismeretében megrajzolhatjuk a mozgások grafikonját. Az ábrán A mozgását az OD egyenesszakasz, B mozgását az OTE megtört vonaldarab ábrázolja, a gondolt változatot pedig az OT^*E^* megtört vonaldarab. Ehhez az ábrához azonban az előbbi eredményektől függetlenül is eljuthatunk, csak az út-tengely egységének megállapítását kell későbbre halasztanunk, illetőleg éppen ez lesz a feladat.

A mozgását mindenesetre egy az O-ból kiinduló (tetszés szerinti) ferde a egyenes ábrázolja. Ennek az idő-tengely 5 percet ábrázoló T' pontja fölötti pontja T. Megszerkesztve a $T'T$ szakasznak azt az U pontját, amelyre $T'U : T'T = 2 : 5$, az OU irányban megkapjuk a B további sebességének megfelelő irányt; ha ugyanis B mindjárt csökkentett sebességgel indult volna, akkor mozgását az OU egyenes ábrázolná. Eszerint b-t a T-n átmenő, OU-val párhuzamos egyenes adja.

Gondoljunk most egy olyan az A-val megegyezően mozgó A' harmadik autót, amely később indul I-ből és éppen C-ben éri utol B-t. Mivel B a C-ben 15 percet késett A-hoz képest, azért ez áll A'-re is, tehát A' mozgásának a' grafikonja az idő-tengely 15 percet ábrázoló V pontjából indul ki és párhuzamos a-val. Eszerint az E pontot b és a' metszése határozza meg, az út-tengely C pontját pedig az E-n átmenő, az idő-tengellyel párhuzamos egyenes metszi ki. (Ezen van természetesen D is.) – Hasonlóan kapjuk annak az A'' gondolt negyedik autó mozgásának a'' grafikonját, amely A-val megegyezően mozogva akkor érne B-vel együtt C-be, ha a motorhiba később következett volna be: ez W-n át párhuzamos a-val, ahol OW megfelel a B későbbi hibájához tartozó 10 perces késésnek. Így E^*-ot a'' és az EC egyenes metszéspontja adja, E^*-ból pedig visszafelé, b-vel párhuzamosan megrajzolhatjuk annak a mozgásnak a $b^* = E^*T^*$ grafikonját, amelyet B a feltevés szerint végzett volna a későbbi hibától a célig (T^*-ot a b^* metszi ki a-ból).

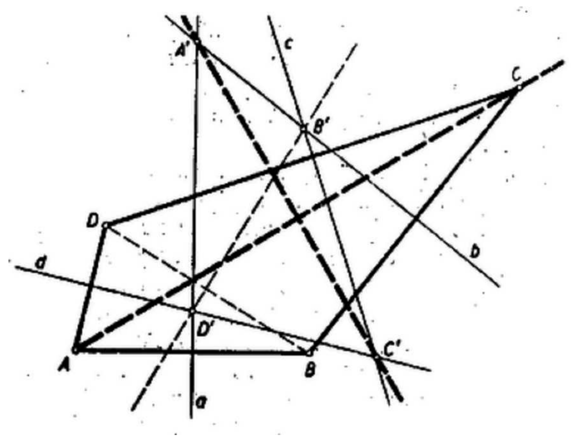
Mivel pedig a T és T^*-nak az út-tengelyen levő H, ill. H^* vetületei közti távolság 4 km-t ábrázol, a HH^* negyedrészét megszerkesztve megkapjuk az út-tengely (1 km-nek megfelelő) mértékegységét. Evvel megmérve az $OC = IC$ szakaszt, megkapjuk a távolság keresett mértékszámát.

Az ábrán a II. megoldás számításainak szemléletes megfelelőit is láthatjuk. $DTE\triangle \sim DT^*E^*\triangle$, ezért $DT^* : DT = DE^* : DE = 10 : 15$, így $DT^* = 2DT/3$, $T^*T = DT/3$; másrészt $IHT\triangle \sim IH^*T^*\triangle \sim ICD\triangle$, ezért $CH : H^*H = DT : T^*T$, $CH = 3 \cdot 4 = 12\,\mathrm{km}$. Továbbá T-nek EC-n levő vetületét T''-vel jelölve $T''E = 5T''D/2$, $DE = 3T''D/2 = 15\,\mathrm{perc}$, tehát $T''D = 10\,\mathrm{perc}$.

3. feladat. *Az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD és DA oldalainak felező merőlegesei legyenek rendre „a”, b, c és d; az ab, bc, cd és da egyenesek metszéspontjait pedig jelöljük A', B', C', D'-vel. Mutassuk ki, hogy ha az „a”, b, c és d egyenesek metszik egymást, és nem egy ponton mennek át, akkor az $A'C'$ és $B'D'$ egyenesek merőlegesek az eredeti négyszög átlóira.*

Megoldás. Az a, b, c és d oldalfelező merőlegesek közül már három sem mehet át egy ponton. Ha ugyanis három egy ponton menne át, akkor ez a metszéspont egyenlő távol lenne az A, B, C és D pontok mindegyikétől, ezért a negyedik oldal felező merőlegese is átmenne rajta. Ezt az esetet pedig a feladat kizárja. Az A', B', C' és D' tehát négy különböző pont.

Az A' pont az ABC háromszög AB és BC oldalai felező merőlegesének metszéspontja, ezért az AC oldal felező merőlegese is átmegy rajta. Ugyanígy C' az ADC háromszög CD és DA oldalai felező merőlegesének metszéspontja, tehát rajta van az AC oldal felező merőlegesén is.



E két háromszög közös AC oldala az eredeti négyszögnek egyik átlója, tehát az A' és C' pontok által meghatározott egyenes éppen az AC átló felező merőlegese.

Ugyanígy adódik – az A, B, C, D betűk szerepét rendre B, C, D, A-nak adva át –, hogy a $B'D'$ egyenes a BD átló felező merőlegese.

Ezzel a feladat állításánál többet mutattunk meg: az $A'C'$ és $B'D'$ egyenesek nemcsak merőlegesek az $ABCD$ négyszög átlóira, hanem felezik is azokat.

Lukács Ottó, Scharnitzky Viktor, Bakos Tibor, Surányi János