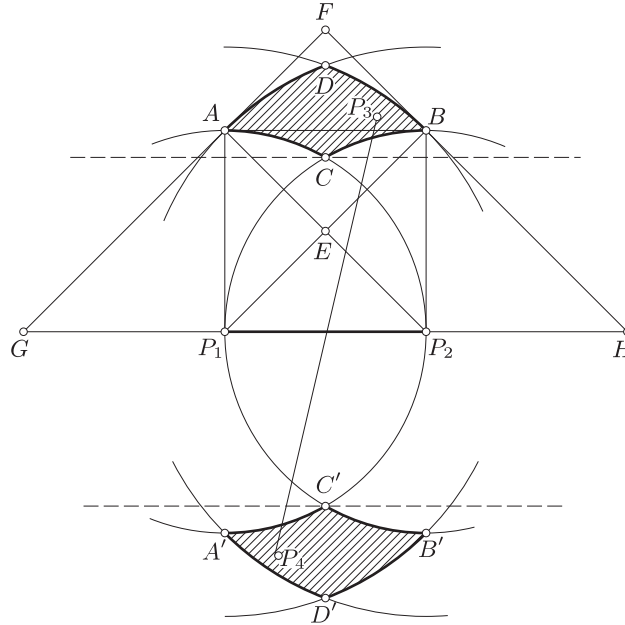


Első feladat. A sík négy pontja hat távolságot határoz meg. Bizonyítsuk be, hogy e távolságok legnagyobbika a legkisebbel osztva nem adhat $\sqrt{2}$ -nél kisebb hányadosot.

I. megoldás. Legyen P_1, P_2, P_3, P_4 a sík szóban forgó négy pontja. Válasszuk hosszegységül az általuk meghatározott távolságok legkisebbikét. Azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy a hat távolság között van legalább $\sqrt{2}$ hosszúságú.

Legyen P_1 és P_2 egymástól minimális, tehát egységnyi távolságra. Írjunk körjük egy-egy egységsugarú kört (1. ábra). A P_3, P_4 pontok egyike sem lehet e körök valamelyikén belül, mert akkor P_1P_2 nem volna minimális. Írjunk most P_1 és P_2 köré $\sqrt{2}$ sugárral egy-egy kört. Ezek a P_1P_2BA négyzet B , ill. A csúcsán haladnak át. Ha a P_3, P_4 pontok valamelyike nincs a két most rajzolt kör valamelyikén belül, akkor a kör középpontjától legalább $\sqrt{2}$ távolságra van.



1. ábra

Ezek szerint csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor P_3 is és P_4 is az utóbb rajzolt körök mindegyikén belül helyezkedik el, de egyikük sincs az előbb rajzolt körök valamelyikének a belsejében. Ez azt jelenti, hogy P_3 és P_4 ábránk körívekkel határolt, vonalkázott tartományaiban van, de a tartományok határvonalából az AD, DB ívek, valamint az $A'D', D'B'$ ívek pontjait nem számítjuk a tartományokhoz.

Ábránkból kiolvashatjuk, hogy az $ACBD$ ívnégyszög az AB átlójú négyzetben helyezkedik el, s hogy az ívnégyszög pontjai közül csak A és B van a négyzet határvonalán (lásd az alábbi megjegyzést). Ebből a szimmetria miatt mindkét tartományunkra következik, hogy egy tartomány bármely két pontjának távolsága 1-nél kisebb, hiszen egy négyzetben elhelyezkedő szakasz, ha a négyzetnek nem átlója, akkor az átlónál rövidebb. Még nyilvánvalóbb ez a tény, ha arra gondolunk, hogy a négyzet köré írt kör átmérője a négyzet átlója, s hogy a körlemezen elhelyezkedő szakasz, ha nem átmérő, akkor az átmérőnél rövidebb.

Arra az esetre szorítkozhatunk tehát, amikor P_3 és P_4 más-más vonalkázott tartományhoz tartozik. A C, C' pontokon át párhuzamosokat húzunk a P_1P_2 szakasszal. E párhuzamosok által határolt sáv elválasztja a két vonalkázott tartományt, és szélessége $\sqrt{2}$ -nél nagyobb, hiszen a CP_1 és P_1C' egységnyi szakaszok szöge 120° , azaz nagyobb, mint 90° . A P_3P_4 szakasz ezek szerint átvágja az említett sávot, s hossza ezért legalább akkora, mint a sáv szélessége, tehát $\sqrt{2}$ -nél nagyobb.

Megjegyzés. Az ábrából olvastuk ki azt, hogy az AB átlójú négyzet tartalmazza az $ACBD$ ívnégyszöget, s hogy az ívnégyszög pontjai közül csak A és B van a négyzet határvonalán. Ezt itt szigorúbban be is bizonyítjuk.

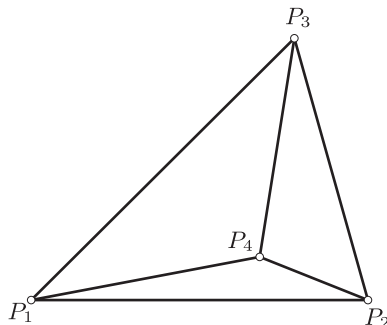
Nyilvánvaló, hogy az A, B pontok az ívnégyszöghöz tartoznak. Elég tehát azt bizonyítanunk, hogy az ívnégyszögnek nincs más pontja a négyzet határvonalán. Nyilvánvaló, hogy az AF, BF egyeneseken nincs az ívnégyszögnek további pontja, hiszen ezek az egyenesek az ívnégyszöget tartalmazó köröket az A , ill. B pontban érintik. Ebből az is következik, hogy ívnégyszögünk az $FGH\Delta$ -ben helyezkedik el. A P_1 középpontú kör AP_2 íve kettévágja ezt a háromszöget, és elválasztja az ívnégyszöget az AP_2 húrtól. Közös pontjuk csak a húr végpontja lehet. Ezért az ívnégyszögnek nincs az AE szakaszon elhelyezkedő, A -tól különböző pontja. Hasonló indokolással nincs a BE szakaszon elhelyezkedő, B -tól különböző pontja sem.

II. megoldás. Ha a derékszögű háromszög átfogóját a kisebbik (pontosabban: a másiknál nem nagyobb) befogóval elosztjuk, $\sqrt{2}$ -nél nem kisebb hányadoshoz jutunk. Ez abból következik, hogy $a \leq b$ esetén $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2a^2$, tehát $c/a \geq \sqrt{2}$.

Ha a háromszög két oldalát változatlanul hagyjuk, de az általuk közrefogott szöget növeljük, akkor a harmadik oldal is növekszik. Ezért tompaszögű háromszögre, sőt (egy egyenesen elhelyezkedő, csatlakozó szakaszokká) elfajuló háromszögre is kimondhatjuk, hogy legnagyobb oldala a legkisebbel osztva legalább $\sqrt{2}$ értékű hányadost ad.

Elég ezért azt bizonyítanunk, hogy a sík bármely négy pontja között van három olyan, amely derékszögű, tompaszögű vagy elfajuló háromszöget határoz meg. Induljunk ki a sík négy pontjából. Feltehetjük, hogy nincs közöttük három egy egyenesen elhelyezkedő. Tekintsük a négy pont konvex burkát, azaz azt az idomot, amelyet úgy kapunk, hogy a pontok köré fonalat feszítünk. Minthogy a pontok nincsenek mindannyian egy egyenesen, konvex burkuk vagy háromszög, vagy négyszög.

Ha a $P_1P_2P_3\triangle$ -höz jutunk (2. ábra), akkor P_4 ennek belsejében van, hiszen három pont nem lehet egy egyenesen. A P_4P_1 , P_4P_2 , P_4P_3 szakaszok háromszögünket három háromszögre vágják fel. Ezeknek P_4 -nél elhelyezkedő három szöge együttesen 360° , s ezért közöttük tompaszög is van (sőt közülük legalább kettő tompa). Egy ilyen tompaszög a pontjainkból alakított tompaszögű háromszög szöge.



2. ábra

Ha a konvex burok négyszög, akkor ennek a szögeiről elmondhatjuk, hogy nem lehet mindegyik hegyes, hiszen az összegük 360° . A legnagyobb szög tehát derékszög vagy tompaszög, s ez egy a pontjainkból alakított derékszögű vagy tompaszögű háromszög szöge.

Megjegyzések. 1. A feladat állításánál valamivel többet is kimondhatunk. Nemcsak az igaz, hogy a vizsgált hányados nem lehet $\sqrt{2}$ -nél kisebb, hanem az is, hogy $\sqrt{2}$ a legkisebb olyan szám, amelyre ez igaz. Ezt a négyzet négy csúcsa bizonyítja, hiszen belőlük $\sqrt{2}$ adódik hányadosul.

Még azzal is kiegészíthetjük a mondottakat, hogy $\sqrt{2}$ csak egy négyzet csúcsai esetében lép fel hányadosként. Ez mindkét megoldásunkból könnyen kiolvasható.

2. Felmerül a kérdés, hogy ha a síknak nem négy, hanem $n > 2$ pontjából indulunk ki, akkor az általuk meghatározott távolságok legnagyobbikát a legkisebbel osztva mekkora hányadoshoz juthatunk. Ez a hányados természetesen tetszőlegesen nagy lehet. Kérdésünk az, hogy mi a hányados lehetséges legkisebb értéke. Azt is kérdezhetjük, hogy a lehetséges legkisebb érték a pontok milyen elhelyezkedése esetén lép fel.

Az $n = 3$ esetben nyilvánvaló, hogy 1 a minimum, s hogy ezt csak a szabályos háromszög csúcsai szolgáltatják. Feladatunk az $n = 4$ esetről szól. Második megoldásunk módszerével könnyű bebizonyítani, hogy ha $n = 5$, akkor a minimumot a szabályos ötszög csúcsai szolgáltatják, tehát a minimum értéke $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \approx 1,618$, s hogy ez más esetben nem lép fel. Ezt a bizonyítást *Bollobás Béla* a versenydolgozatában el is végezte.

Az $n > 5$ esetekben nem ismeretes a válasz. Megemlíthető mindenesetre, hogy már az $n = 6$ esetben sem adja a szabályos sokszög a minimális értéket, hiszen a szabályos hatszög minden második csúcsát „benyomva” a vizsgált hányados csökken, amit nem nehéz bebizonyítani.

3. Még nehezebb a kérdés, ha nem a sík, hanem a tér pontjaira vetjük fel. Itt természetesen csak az $n > 4$ esetekre gondolunk. Már az $n = 5$ eset elintézése sem könnyű. Bizonyítás nélkül megemlíthjük, hogy ekkor a minimumot szolgáltató öt pontot úgy kell felvenni, hogy közülük három egy szabályos háromszöget határozzon meg, a másik kettő a háromszög síkjára szimmetrikusan, a háromszög síkjára a háromszög középpontjában emelt merőlegesen helyezkedjék el, és távolságuk a háromszög oldalával legyen egyenlő. A minimum értékére $\sqrt{12/7} \approx 1,309$ adódik. Említést érdemel, hogy ez a síkban négy pontra adódó értéknél kisebb.

4. A feladatnak még egy más irányú általánosítását is megemlíthjük. A sík négy pontjából indulunk ki. Az általuk meghatározott hat távolságot nagyság szerint rendezzük: a legnagyobbval kezdjük, a legkisebbel végezzük, s közben természetesen ismétlődést is megengedünk. Ha e sorozat i -edik elemét a k -adikkal elosztjuk, a $q(i, k)$ -val jelölt hányadoshoz jutunk. Azt kérdezzük, hogy megadott $i < k$ értékekre ez a hányados milyen értékeket vehet fel. Ez a kérdés i és k különféle megválasztásának megfelelően 15 különböző kérdést tartalmaz. Feladatunk csak $q(1, 6)$ értékével foglalkozott, és $q(1, 6) \geq \sqrt{2}$ bizonyítását kívánta. Első megjegyzésünk rámutatott, hogy $q(1, 6)$ felveheti a $\sqrt{2}$ értéket is. Könnyű belátni, hogy minden nagyobb értéket is felvehet. A $q(1, 6)$ -ra felvetett kérdésre tehát azt kell felelnünk, hogy $q(1, 6)$ értéke lehet minden olyan szám, amely $\sqrt{2}$ -nél nem kisebb.

A többi 14 kérdés vizsgálatát az olvasóra hagyjuk. Különösebb nehézséget egyikük megválaszolása sem jelent, de vigyázni kell, mert a felelet nem minden kérdésre ugyanaz.

Hasonló kérdést vethetünk fel a sík n pontjára, vagy a tér n pontjára is. Így már nehéz kérdésekhez is eljutunk, és csak nagyon kevés rájuk vonatkozó ismert választ említhetnénk. Megemlítjük, hogy a sík $3n$ pontjára vonatkozólag $q(1, 3n^2 + 1) \geq \sqrt{2}$. Ezt *Turán Pál* és *Erdős Pál* bizonyította be. Bizonyításuk többek között éppen feladatunk állítására támaszkodik. Maga a feladat is innen ered.

Második feladat. *Bebizonyítandó, hogy az 1-nél kisebb, pozitív a, b, c számokból képezett*

$$(1-a)b, \quad (1-b)c, \quad (1-c)a$$

szorzatok nem lehetnek mindannyian $\frac{1}{4}$ -nél nagyobbak.

I. megoldás. Abból indulunk ki, hogy ha $0 < a < 1$, akkor

$$a(1-a) \leq \frac{1}{4},$$

hiszen ez átrendezéssel keletkezik a nyilván helyes $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből. Ebből (és a b, c számokra felírt hasonló egyenlőtlenségekből) következik, hogy a feladatunkban szereplő három szorzat szorzata

$$(1-a)b \cdot (1-b)c \cdot (1-c)a = a(1-a) \cdot b(1-b) \cdot c(1-c) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

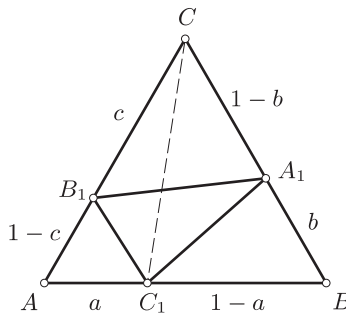
Mind a három vizsgált szorzat tehát nem lehet $\frac{1}{4}$ -nél nagyobb, mert akkor a szorzatuk $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ -nél nagyobb volna.

II. megoldás. A vizsgált három szorzat értékhármasa nem változik meg, ha az a, b, c számokat ciklikusan felcseréljük (azaz a b, c, a vagy a c, a, b sorrendre térünk át). Feltehetjük ezért, hogy a három szám közül a a legnagyobb, hogy tehát $b \leq a$. Ebből következik, hogy

$$(1-a)b \leq (1-a)a \leq \frac{1}{4}.$$

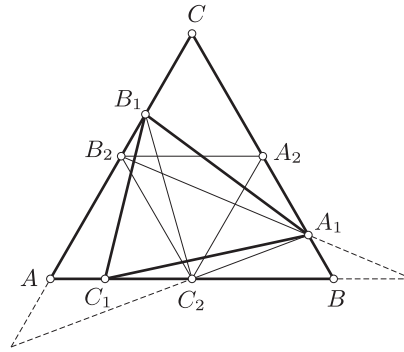
Az utolsó lépés felhasználta azt az egyenlőtlenséget, amelyből az első megoldás kiindult.

III. megoldás. Egy egységoldalú szabályos $ABC\triangle$ három csúcsából felmérjük a háromszög más-más oldalára az a, b, c távolságokat. A végpontok az $A_1B_1C_1\triangle$ -et határozzák meg (3. ábra). Ezt a háromszöget az eredetivé három háromszög egészíti ki. Ezek területe az eredeti háromszög területének rendre $(1-a)b$, $(1-b)c$ és $(1-c)a$ -szorosa, hiszen az $ABC\triangle$ -ből pl. az AB alapot $(1-a)$ -szorosára csökkentve a $C_1BC\triangle$ -höz, s ennek magasságát b -szeresére csökkentve a $C_1BA_1\triangle$ -höz jutunk.



3. ábra

Elég tehát megmutatnunk, hogy ha egy egységterületű szabályos háromszögbe háromszöget írunk, akkor a keletkező három kiegészítő háromszög között van $\frac{1}{4}$ -nél nem nagyobb területű. A középvonalak határolta $A_2B_2C_2\triangle$ -ről és az ezt kiegészítő háromszögekről tudjuk, hogy területük $\frac{1}{4}$. Állításunk nyilvánvalóan helyes tehát akkor, ha a most említett háromszögek valamelyike tartalmazza beírt $A_1B_1C_1\triangle$ -ünk kiegészítő háromszögeinek valamelyikét. Feltehetjük ezért, hogy a középvonalak szétválasztják a rendre a BC, CA, AB oldalakon elhelyezkedő A_1, B_1, C_1 pontokat (4. ábra), mégpedig válassza el a C_2A_2, A_2B_2, B_2C_2 középvonal rendre az A_1, B_1, C_1 pontot a másik kettőtől. Ennek az elhelyezkedésnek arra a következményére fogunk támaszkodni, hogy az A_1B_1 egyenes metszi az AB félegyenest, s hogy a C_2A_1 egyenes metszi a CA félegyenest. Elegendő most már csak azt bizonyítanunk, hogy az $A_1B_1C_1\triangle$ területe $\frac{1}{4}$ -nél nagyobb. Ebből következik ugyanis, hogy kiegészítő háromszögeinek területösszege $\frac{3}{4}$ -nél kisebb, hogy tehát van közöttük $\frac{1}{4}$ -nél kisebb területű.



4. ábra

Az $A_1B_1C_1\triangle$ területét csökkentjük, ha C_1 csúcsát C_2 -be toljuk el. Ez abból következik, hogy C_1 az eltoláskor közeledik az A_1B_1 egyeneshez, hiszen közeledik az AB és az A_1B_1 egyenesek metszéspontjához. Az $A_1B_1C_2\triangle$ területe tovább csökken, ha B_1 csúcsát B_2 -be toljuk el, mert ekkor B_1 az AC , C_1A_2 egyenesek metszéspontjához, tehát az A_1C_2 egyeneshez is közeledik. Ha a kapott $A_1B_2C_2\triangle$ A_1 csúcsát a B_2C_2 oldallal párhuzamosan A_2 -be toljuk el, területe nem változik meg. Minthogy területcsökkentéssel az $\frac{1}{4}$ területű $A_2B_2C_2\triangle$ -höz jutottunk, az $A_1B_1C_1\triangle$ területe $\frac{1}{4}$ -nél valóban nagyobb.

Megjegyzések. 1. A feladatot megoldó versenyzők nagy többsége az első megoldást találta meg. A második megoldás mondható a legegyszerűbbnek. A harmadik megoldás lényegesen bonyolultabb, viszont rámutat arra a geometriai háttérre, amelyből a feladat származott.

2. Feladatunk az a, b, c számokra vonatkozó két megszorítást tartalmaz: megköveteli egyrészt, hogy ezek a számok 1-nél kisebbek, másrészt azt is, hogy pozitívak legyenek. Egyik megszorításra sincs szükség, de valamelyikre szükség van.

Ha ugyanis csak azt követeljük meg, hogy a számok 1-nél kisebbek legyenek, akkor $1-a, 1-b, 1-c$ pozitív értékek, s az esetleg előforduló negatív vagy 0 értékű b, c, a számmal szorozva $\frac{1}{4}$ -nél kisebb szorzatot adnak. Ha viszont csak a, b, c pozitivitásához ragaszkodunk, akkor ezeket az esetleg előforduló negatív vagy 0 értékű $1-c, 1-a, 1-b$ értékekkel szorozva jutunk $\frac{1}{4}$ -nél kisebb eredményhez. A feladat állítása ezek szerint mindkét esetben csak érdektelen tartalommal bővül. A két bővítés egymástól lényegében nem is különbözik, hiszen a feladat változatlan marad, ha benne a, b, c helyébe rendre az $1-c, 1-b, 1-a$ értékeket írjuk. Az $a = \frac{1}{2}, b = 2, c = -1$ példa mutatja, hogy mind a két követelést nem hagyhatjuk el.

3. Első két megoldásunk módszerével (az előző megjegyzésre is támaszkodva) könnyedén bebizonyíthatjuk, hogy ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok pozitívak, akkor az

$$(1-a_1)a_2, \quad (1-a_2)a_3, \quad \dots, \quad (1-a_n)a_1$$

szorzatok nem lehetnek mindannyian $\frac{1}{4}$ -nél nagyobbak, sőt feladatunk még messzebb menő általánosításaként azt is, hogy ha a pozitív $a_1, a_2, \dots, a_n$ számoknak egy permutációja $b_1, b_2, \dots, b_n$, akkor az

$$(1-a_1)b_1, \quad (1-a_2)b_2, \quad \dots, \quad (1-a_n)b_n$$

számok sem lehetnek mindannyian $\frac{1}{4}$ -nél nagyobbak.

4. Feladatunk annak bizonyítását kívánta meg, hogy három szám legkisebbike $\frac{1}{4}$ -nél nem nagyobb. Kérdezhetjük, hogy ha ezt a három számot nagyság szerint rendezzük, mit mondhatunk ki a középsőről és a legnagyobbrol. Könnyű belátni, hogy (0 és 1 közötti számok körében maradván) a középső nem lehet $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb, s hogy további korlátozás a három szám egyikére sem mondható ki.

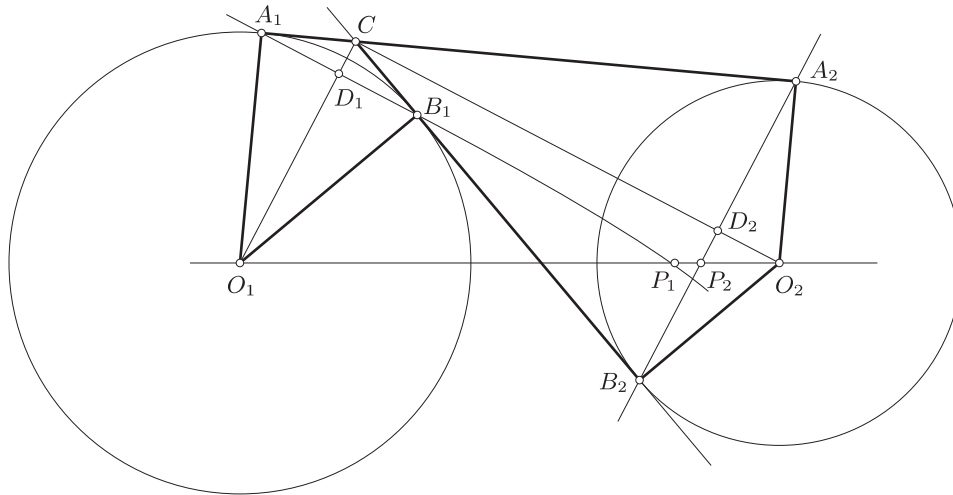
Ha az előző megjegyzés általánosításainak a körében vetjük fel a hasonló problémát, kérdezve, hogy a nagyság szerint rendezett szorzatok közül az i -edikre milyen korlátozásnak kell teljesülnie ($i = 1, 2, \dots, n$), akkor már nehezebb problémákhoz jutunk.

Harmadik feladat. Tekintsünk két egymáson kívül elhelyezkedő kört, egy közös külső és egy közös belső érintőjüket. Érintési pontjaik mindkét körben egy-egy húrt határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy e húrok egyenesei egymást a középpontokat összekötő egyenesen metszik.

I. megoldás. Az O_1, O_2 középpontú körök A_1A_2 külső és B_1B_2 belső érintőjének metszéspontját C -vel jelöljük (5. ábra). Az $O_1A_1CB_1$ és $CA_2O_2B_2$ derékszögű deltoidok egymáshoz hasonlóak, hiszen C -nél elhelyezkedő szögek

mellékszögek, s ebből következik, hogy szögeik páronként egyenlők. Deltoidok körében ez a hasonlóságot valóban biztosítja. A deltoidok CO_1 , CO_2 átlói merőlegesek egymásra, mert az említett mellékszögek szögfelezői. Minthogy az A_1B_1 , A_2B_2 átlók mindegyike merőleges a CO_1 , CO_2 átlók egyikére (az ugyanazon deltoidbeli átlóra), mindegyikük párhuzamos a másikkal.

Messék az A_1B_1 , A_2B_2 egyenesek az O_1O_2 centrálisra a P_1 , P_2 pontokban. Bebizonyítjuk, hogy ez a két pont azonos, hogy tehát az A_1B_1 , A_2B_2 egyenesek metszéspontja valóban a centrálisra van. Az 5. ábra szándékosan torz, hogy rajta okoskodásunkat jobban követhessük. Elmondhatjuk, hogy a következőkben ábránk torz voltát bizonyítjuk be.



5. ábra

A deltoidok hasonlóságából következik, hogy átlóik D_1 , D_2 metszéspontjára

$$O_1D_1 : O_1C = CD_2 : CO_2.$$

A párhuzamos szelők tétele szerint a CO_1O_2 szarait metsző A_1B_1 , CO_2 párhuzamosokra

$$O_1D_1 : O_1C = O_1P_1 : O_1O_2,$$

és a CO_2O_1 szarait metsző A_2B_2 , CO_1 párhuzamosokra

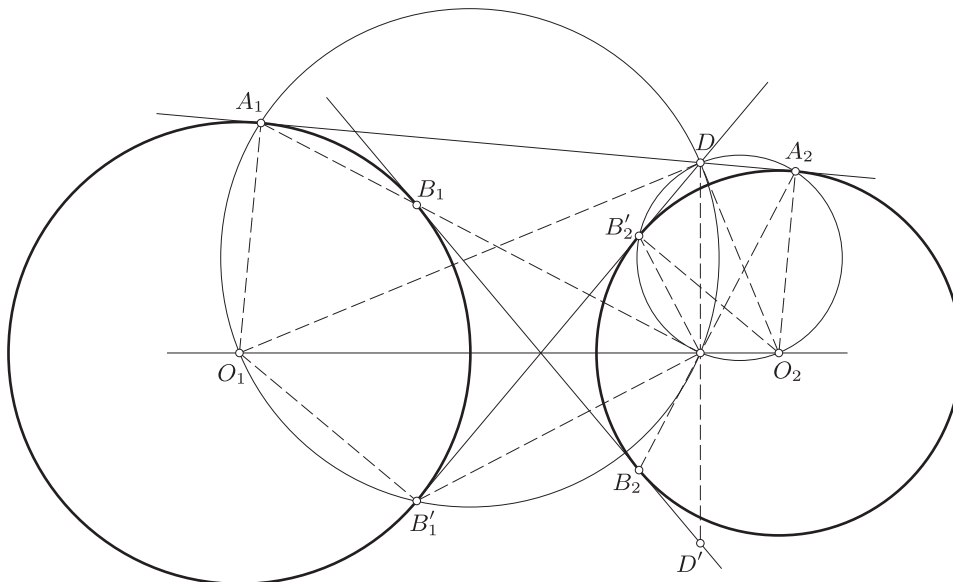
$$CD_2 : CO_2 = O_1P_2 : O_1O_2.$$

Aránypárjaink egybevetéséből következik, hogy

$$O_1P_1 : O_1O_2 = O_1P_2 : O_1O_2,$$

hogy tehát $O_1P_1 = O_1P_2$, azaz P_1 és P_2 egymással azonos pontok.

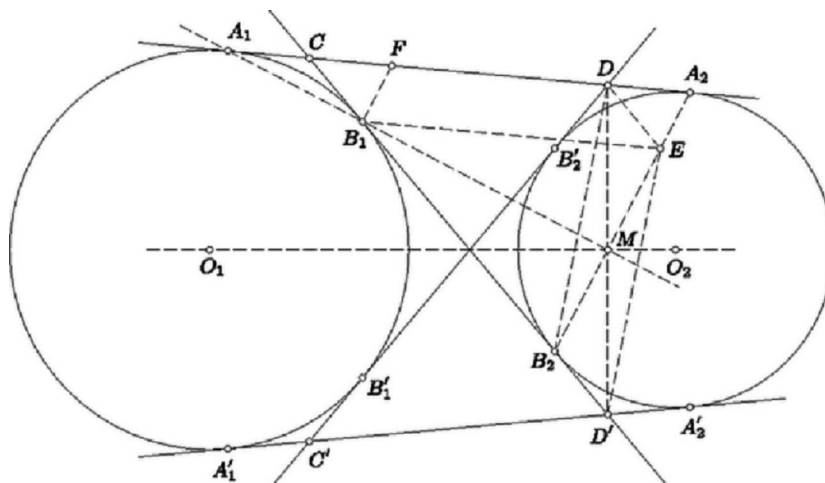
II. megoldás. A feladatban előforduló két érintőn kívül a másik $B'_1B'_2$ érintőt is meghúzzuk. Ez az A_1A_2 külső érintőt a D pontban metszi, D -nek a centrálisra vetett vetületét M -mel, a centrálisra vonatkozó tükörképét pedig D' -vel jelöljük (6. ábra).



6. ábra

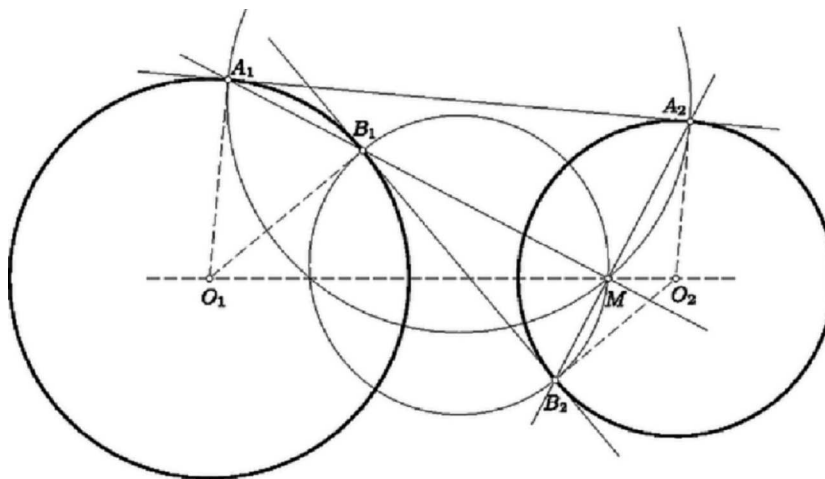
Az O_2D átmérőjű kör tartalmazza az A_2 , B'_2 , M pontokat, mert az O_2D szakasz ezekből a pontokból derékszögben látható. Minthogy $A_2O_2D \triangleleft DO_2B'_2 \triangleleft$, a kerületi szögek tétele szerint $A_2MD \triangleleft DMB'_2 \triangleleft$. Ebből a szimmetria révén $A_2MD \triangleleft D'MB_2 \triangleleft$ következik, tehát az is, hogy az A_2 , M , B_2 pontok egy egyenesen vannak.

III. megoldás. Felhasználjuk azt, hogy ha két kör külső és belső érintőjének metszéspontját az egyik érintőn a hozzá legközelebb eső érintési ponttal összekötjük, mindig ugyanakkora szakaszhoz jutunk, bármely érintőpár metszéspontjából indultunk is ki. A 7. ábrán tehát $CB_1 = DA_2 = D'B_2$.



Abból indulunk ki, hogy az A_1B_1 , A_2B_2 egyenesek egymásra merőlegesek. Ezt az első megoldás mintájára láthatjuk be. Az egyenlőszárú $A_2B_2C\Delta$ -ból az A_2C szárral párhuzamos EB_1 szelő egy ugyancsak egyenlőszárú $EB_2B_1\Delta$ -et vág le. Ennek alapja az A_2B_2 egyenesen, magassága pedig az alapra merőleges A_1B_1 egyenesen helyezkedik el. Ezeknek az egyeneseknek az M metszéspontja felezi tehát az EB_2 szakaszt.

IV. megoldás. A hatványvonalra vonatkozó ismeretekből felhasználjuk azt, hogy mindazok a pontok, amelyekből két egymást metsző körhöz húzott érintőszakaszok egymással egyenlők, a körök közös húrjának az egyenesén vannak.



Ismét abból indulunk ki, amit már az első megoldásban beláttunk, hogy az A_1B_1 , A_2B_2 egyenesek egymást az M pontban merőlegesen metszik. *Thales* tétele szerint tehát M hozzátartozik az A_1A_2 átmérőjű körhöz és a B_1B_2 átmérőjű körhöz is (8. ábra).

Az O_1 pontból e két körhöz vont érintőkre $O_1A_1 = O_1B_1$, s az O_2 pontból hozzájuk vont érintőkre $O_2A_2 = O_2B_2$. Az előrebecsátottak szerint tehát O_1 és O_2 egy olyan egyenesen van, amely a körök közös M pontját tartalmazza. Ez azt bizonyítja, hogy az O_1, O_2, M pontok egy egyenesen vannak.

Hajós György