

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden többjegyű négyzetszámban van legalább két különböző számjegy.

I. megoldás. A bizonyítandó állítást így is fogalmazhatjuk: nincs olyan többjegyű négyzetszám, amelynek minden jegy megegyezik.

Megjegyezzük, hogy ha egy szám elé nullákat írunk, értéke nem változik, de ezeket a nullákat a jegyek számának megállapításakor nem vesszük tekintetbe. Pl. 05 nem kétjegyű, hanem egyjegyű szám. Így a több 0-val írt 000...0 számok teljes négyzetek, de ezeket nem tekintjük többjegyűnek.

Ezek után a következő alakú számokról kell bebizonyítanunk, hogy nem lehet köztük négyzetszám:

$$\begin{array}{lll} 1 \dots 1, & 4 \dots 4, & 7 \dots 7, \\ 2 \dots 2, & 5 \dots 5, & 8 \dots 8, \\ 3 \dots 3, & 6 \dots 6, & 9 \dots 9, \end{array}$$

akárhány – a szélsőkkel megegyező – jegyét képzeljünk is a pontok helyére. (Az „akárhány” szó itt nullát is jelenthet, vagyis azt, hogy a pontokat kihagyva a két szélső számjegyből alkotunk számot.) Közülük négyet mindjárt kizárhatunk, mert 2-re, 3-ra, 7-re és 8-ra nem végződhet négyzetszám. Az egyjegyű számok négyzetéről ezt a lehetséges esetek végignézésével azonnal megállapíthatjuk:

$$\begin{array}{lllll} 0^2 = 0, & 1^2 = 1, & 2^2 = 4, & 3^2 = 9, & 4^2 = 16, \\ 5^2 = 25, & 6^2 = 36, & 7^2 = 49, & 8^2 = 64, & 9^2 = 81. \end{array}$$

Többjegyű számok négyzetére pedig azért igaz ez az állítás, mert csak az utolsó jegyüktől függ, hogy mi lesz a négyzetüknek az utolsó jegy.

Általánosabban: két szám szorzatának utolsó jegy csak a számok utolsó jegyétől függ. Ezt könnyen beláthatjuk, ha a szorzás szokásos elvégzési módjára gondolunk, például

$$\begin{array}{r} 27 \cdot 42 \\ \hline 54 \\ 108 \\ \hline 1134 \end{array}$$

Az utolsó jeggyel végzett szorzás részletszorzatának utolsó jegyéhez már nem adunk semmit, ez lesz a szorzat utolsó jegy.

Az egyjegyű számok négyzetét megfigyelve még egy megállapítást tehetünk: a páratlan egyjegyű számok négyzetének tizedese páros (a fenti felsorolásban: 0, 0, 2, 4, 8). Számpéldák azt mutatják, hogy ez érvényes többjegyű számokra is. Ha ez mindig így van, akkor a csupa 1, 5, 9-ből álló számok sem lehetnek négyzetszámok, hiszen utolsó előtti jegyük páratlan.

Bebizonyítjuk, hogy minden többjegyű páratlan szám négyzetének utolsó előtti jegy páros. Ezt beláthatjuk a négyzetreemelés bármelyik szokásos eljárása alapján, vagy algebrailag a következő módon. Jelöljük a szám utolsó jegyét a -val, az utolsó jegy elhagyásával visszamaradó számot $10A$ -val. Ekkor

$$(10A + a)^2 \equiv 100A^2 + 20Aa + a^2,$$

és itt az első tag nem befolyásolja a négyzetszám tizedesét, a második tag páros jeggyel járul hozzá, és ha a páratlan, akkor a harmadik tag is páros jeggyel járul hozzá, mint arról az esetek végignézésével már az előbb meggyőződünk.

Most már csak a $4 \dots 4$ és $6 \dots 6$ alakú számokról kell bebizonyítanunk, hogy nem lehetnek négyzetszámok. Ezek páros számok, tehát mindegyikük csak páros számnak lehetne a négyzete. A $6 \dots 6$ szám nem lehet négyzetszám, mert páros szám négyzete 4-gyel is osztható: $(2c)^2 = 4c^2$, viszont $6 \dots 6 = 6 \cdot 1 \dots 1$ páros, de 4-gyel nem osztható.

Azt is látjuk, hogy páros szám négyzetének a negyedrésze is négyzetszám (c^2), viszont $4 \dots 4 = 4 \cdot 1 \dots 1$, és itt a második tényező egy legalább két 1-esből álló szám, az ilyenekről pedig már beláttuk, hogy nem lehetnek négyzetszámok.

Minden esetet végignéztünk, s így bebizonyítottuk, hogy többjegyű négyzetszám nem állhat egyező jegyekből, mindig van benne legalább két különböző számjegy.

II. megoldás. Láttuk, hogy egész számok négyzetének (általában: egész számok szorzatának) utolsó jegy csak az alap (a tényezők) utolsó jegyétől függ. Hasonlóan belátható, hogy a szorzat utolsó két jegy is csak a tényezők utolsó két jegyétől függ.

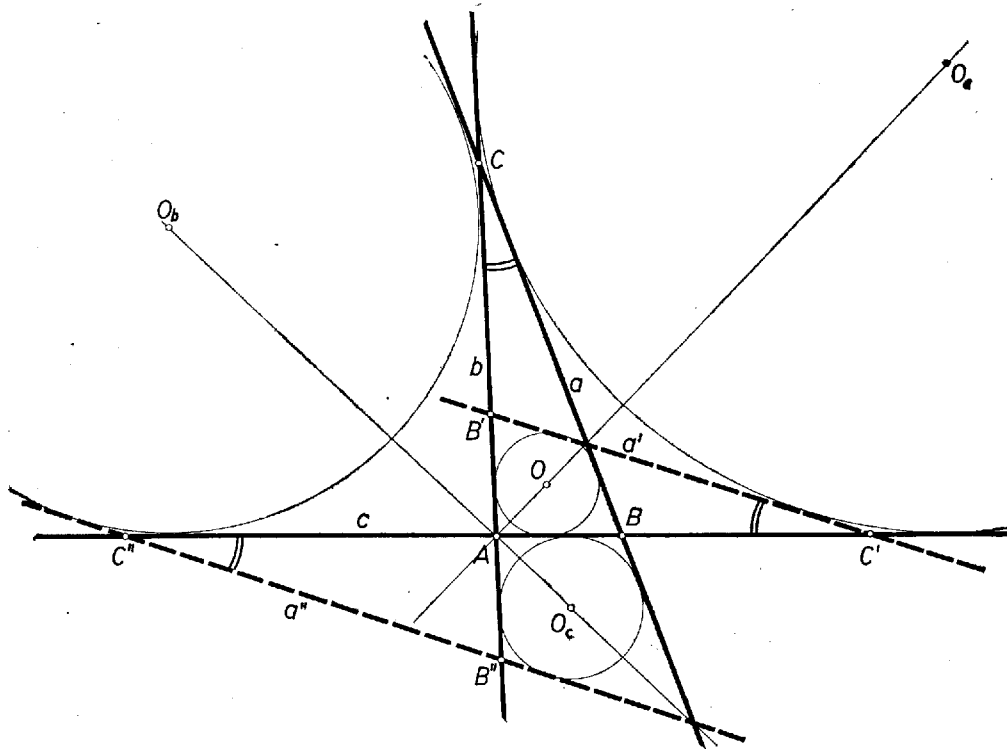
Ezt is bebizonyíthatjuk akár a szorzási eljárás elemzése alapján, akár algebrai jelöléssel. Lássuk az utóbbit. Jelentse a és b a szóban forgó tényezők utolsó két jegyéből álló számot, A és B az elhagyásuk után visszamaradt számot. Akkor maguk a tényezők $100A + a$ és $100B + b$, szorzatuk pedig $10\,000AB + 100Ab + 100aB + ab$. Az első három tag nem befolyásolja a szorzat utolsó két jegyét, hiszen mindegyiknek a végén legalább két 0 van. Tehát a szorzat utolsó két jegy – mint állítottuk – megegyezik a tényezők utolsó két jegyéből álló számok (a és b) szorzatának utolsó két jegyével.

Ha tehát meg akarjuk állapítani, hogy mi lehet egy négyzetszám utolsó két jegye, elég végignézni az egy- és kétjegyű számok négyzetének utolsó két jegyét. Célszerű ehhez elővenni a Négyjegyű Függvénytáblázatot, amelyet a versenyzők – mint általában bármely könyvet – szabadon használhattak. Megállapíthatjuk, hogy egyező jegyeként csak 00 és 44 fordul elő az utolsó két helyen. (Megjegyezzük, hogy a vizsgálandó négyzetszámok legfeljebb négy jegyűek, így a táblázat a kerekítés nélküli, pontos értékeket közli.) Egy csupa 0-ból álló számot nem tekintünk többjegyűnek. Ha volna csupa 4-esből álló többjegyű négyzetszám, akkor volna csupa 1-esből álló is, amint azt az I. megoldásban beláttuk. Ilyen azonban nincs, hiszen az utolsó két jegy nem lehet 11, tehát csupa 4-esből álló négyzetszám sem fordulhat elő. A többjegyű négyzetszámokban tehát csakugyan kell lennie legalább két különböző jegynek.

Megjegyzés. A $0, 1, \dots, 99$ számok négyzete helyett elég csak a $0, 1, \dots, 25$ számok négyzetét végignézni, mert 25-ön túl új kétjegyű végződés nem lép fel. Egyrészt ugyanis $(50 - a)^2$ -nek ugyanaz az utolsó két jegye, mint a^2 -nek, hiszen különbségük, $2500 - 100a$, 100-nak többszöröse, és ha $0 \leq a \leq 25$, akkor $25 \leq 50 - a \leq 50$; másrészt $(b + 50)^2$ -nek hasonló okból ugyanaz az utolsó két jegye, mint b^2 -nek, és ha b 0-tól 50-ig változik, akkor $50 + b$ végigfut 50-től 100-ig a számokon.

2. feladat. Rajzoljuk meg azt a négy kört, amelyek érintik egy háromszög oldalegyeneseit, vagyis a beírt kört és a hozzáírt köröket. Bizonyítsuk be, hogy a beírt és bármelyik hozzáírt kör negyedik közös érintője párhuzamos a másik két hozzáírt kör negyedik közös érintőjével.

I. megoldás. Az ABC háromszög a oldalegyenese a beírt és az O_a középpontú hozzáírt kör egyik közös belső érintője. Jelöljük e két kör másik közös belső érintőjét a' -vel. Az a egyenes érinti a másik két hozzáírt kört is, mint e körök közös külső érintője. Jelöljük ennek a két körnek a másik közös külső érintőjét a'' -vel. Bebizonyítjuk, hogy $a' \parallel a''$.



Két kör együttesen tükrös a középpontjukon át húzott egyenesre, a két kör úgynevezett centrálisára. Ebből következik, hogy két kör közös belső érintői, és ugyanúgy közös külső érintői is tükrösek a két kör centrálisára. Így pl. a' az a oldal tükrösképe az OO_a centrálisra vonatkozóan, a -nak az O_bO_c centrálisra vonatkozó tükrösképe pedig a'' . Eszerint az a' egyenest két különböző tengelyre vonatkozó egymás utáni tükrözés átviszi az a'' egyenesbe. Tudjuk viszont, hogy két egymást metsző egyenesre való tükrözés együttesen egy olyan elforgatást eredményez, amelynek a szöge a tükrötengelyek egymással alkotott szögének kétszerese, és a forgatás középpontja a két tengely metszéspontja. Az egyik tükrötengely OO_a , a b és c egyenesek egyik szögfelezője, a másik O_bO_c , ugyanennek az egyenespárnak a másik szögfelezője. A két szögfelező, mint tudjuk, merőleges egymásra. Tehát az a' egyenest két egymásra merőleges egyenesre való tükrözés, vagyis az A pont körüli 180° -os elforgatás viszi át az a'' egyenesbe, és így csakugyan $a' \parallel a''$.

Hasonló jelöléssel és gondolatmenettel következik az is, hogy $b' \parallel b''$ és $c' \parallel c''$.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használjuk. Jelöljük továbbá a' és b metszéspontját B' -vel, a' és c metszéspontját C' -vel, a'' és b , ill. a'' és c metszéspontját B'' -vel, ill. C'' -vel. A szimmetria miatt $BC'CB'$ egyenlő szárú trapéz, tehát húrnégyszög, és így $BC'B' \sphericalangle = BCB' \sphericalangle$. Ugyanezt mondhatjuk a $BCC''B''$ négyszögről is. Ennélfogva $BCB'' \sphericalangle = BC''B'' \sphericalangle$. Ezek szerint $BC'B' \sphericalangle = BC''B'' \sphericalangle$, és így $a' \parallel a''$.

3. feladat. Egy köralakú versenypályának egy pontjából egyszerre egy irányban elindult három futó. Az első 6 perc alatt utolérte (lekörözte) a másodikat, 10 perc alatt a harmadikat. Hány perc alatt érte utol a harmadik a másodikat? (A futók sebességét tekintsük egyenletesnek, a pálya szélességét hagyjuk figyelmen kívül).

I. megoldás. Legyen a futók sebessége sorban u , v és w , a pálya kerülete k , a keresett idő pedig, ahány perc alatt a harmadik futó lekörözte a másodikat, x . Akkor a megtett utakra a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\begin{array}{llll} (1) & 6u = 6v + k, & \text{vagyis} & 6u - 6v - k = 0, \\ (2) & 10u = 10w + k, & \text{vagyis} & 10u - 10w - k = 0, \\ (3) & xw = xv + k, & \text{vagyis} & xw - xv - k = 0. \end{array}$$

Az (1) egyenletet $5x$ -szel, (2)-t $3x$ -szel, (3)-at 30 -cal szorozva u , v és w szorzója mindegyik egyenletben $30x$ vagy $-30x$ lesz:

$$\begin{array}{ll} (4) & 30xu - 30xv - 5xk = 0, \\ (5) & 30xu - 30xw - 3xk = 0, \\ (6) & 30xw - 30xv - 30k = 0. \end{array}$$

(5) és (6) összegéből kivonva (4)-et u , v és w kiesik:

$$2xk - 30k = 0.$$

Míthogy $k \neq 0$, ebből $x = 15$. Tehát a harmadik futó 15 perc alatt körözte le a másodikat.

II. megoldás. A feladatot sok másféle módon is megoldhatjuk, kevesebb ismeretlennel is, mint az I. megoldásban, sőt egyenlet nélkül is.

Képzeld, hogy a futók változatlan sebességgel tovább futnak. Az első a másodikat minden 6 perc elteltével, a harmadikat minden 10 perc elteltével lekörözi, tehát fél órával az indulás után az első éppen 5 körrel futott többet, mint a második, és 3 körrel futott többet, mint a harmadik (tehát mindhárman a pálya ugyanazon pontján vannak). Így hát a harmadik futó fél órával az indulás után $5 - 3 = 2$ körrel futott többet, mint a második. Ebből következik, hogy negyedóránként (15 percenként) körözte le a másodikat.

Megjegyzés. Az adatokból az u , v , w és k ismeretlenek nem is számíthatók ki, még az arányuk sem.

Varga Tamás