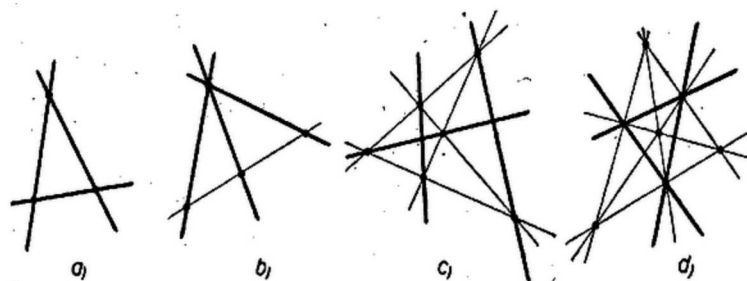


¹¹ *N. G. de Bruijn* holland matematikus, munkatársam, kivel több közös cikkem van.

határon túl nő, vagyis akárhogy is adunk meg egy A egész számot, létezik egy csak A -tól függő $n_0 = n_0(A)$ szám úgy, hogy bárhogy is adunk meg a síkban n_0 -nál több pontot, amelyek nincsenek mind egy egyenesen, ezek legalább A közöséges egyenest határoznak meg.

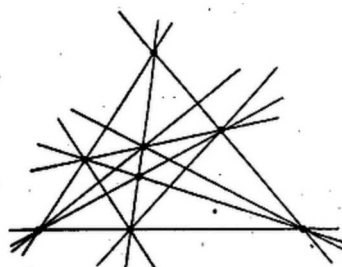


2. ábra

$G. Dirac$ ¹² bebizonyította, hogy $f(n) \geq 3$. E becslés $n = 3$ -ra, 4-re, 6-ra és 7-re pontos, amint azt a 2. ábra példái mutatják. $Motzkin$ bebizonyította¹³, hogy $f(n) > \sqrt{n}$, és ezzel sejtésünket igazolta. Legújabb időben $Kelly$ és $Moser$ ¹⁴ bebizonyították¹⁵, hogy $f(n) \geq \frac{3}{7}n$; ez megint pontos $n = 7$ -re, nincs azonban kizárva, hogy n nagy értékeire a tétel még javítható, például igaz lehetne a következő sejtés: Létezik egy olyan n_0 egész szám, hogy ha $n > n_0$ és $P_1, \dots, P_n$ tetszőleges n pont a síkban, melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor ezek legalább $n - 1$ közöséges egyenest határoznak meg. Ez azt jelentené: hogyha $n > n_0$, akkor $f(n) = n - 1$ (ti. már említettük, hogy ha $n - 1$ pont egy egyenesen van, akkor $n - 1$ közöséges egyenest nyerünk, s ezért minden n -re $f(n) \leq n - 1$). $G. Dirac$ sejtette, hogy $n > 7$ esetén $f(n) \geq \frac{n}{2}$.

5. Még 1933-ban észrevettem, hogy *Gallai* tételéből következik, hogy ha a síkban n pont van adva, melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor ezek legalább n egyenest határoznak meg, azaz azon egyenesek száma, melyek e pontok közül legalább kettőn átmennek, nem lehet n -nél kisebb. A bizonyítás *Gallai* tételének segítségével könnyű (lásd az 1183. feladatot).

Nyilvánvaló, hogy e tétel pontos, ha ugyanis $n - 1$ pont van egy egyenesen, s az n -edik pont nincs ezen az egyenesen, akkor e pontok nyilván n egyenest határoznak meg. Sejtettem, hogy ha az n pont olyan, hogy nincs közülük $n - 1$ sem egy egyenesen, és n elég nagy szám, akkor ezek legalább $2n - 4$ egyenest határoznak meg. Ez kis n -ekre, pl: $n = 6, 7, 8$ -ra nem igaz. A 2. c), d) ábrán és a 3. ábrán $n = 6, 7, 8$ pont esetén rendre 7, 9, ill. 11 egyenest látunk, $2n - 4$ pedig ezekre az n -ekre 8, 10, ill. 12. *Kelly* és *Moser* a már idézett cikkükben¹⁵ a következő általános tételt bizonyítják be:



3. ábra

Tegyük fel, hogy az n pont olyan, hogy legfeljebb $n - k$ van közülük egy egyenesen, tegyük fel továbbá, hogy

$$(1) \quad n \geq \frac{1}{2} [3(3k - 2)^2 + 3k - 1],$$

akkor az n pont legalább

$$(2) \quad kn - \frac{1}{2}(3k + 2)(k - 1)$$

egyenest határoz meg. Nem feltétlenül határoznak meg a pontok (2)-nél több egyenest, mint ezt a szerzők következő példája mutatja: $P_1, \dots, P_k$ legyen k pont a síkban úgy, hogy nincs közülük három egy egyenesen, e a sík egy

¹² $G. Dirac$ magyar származású angol matematikus, a világhírű angol fizikus, $P. Dirac$ fogadott fia.

¹³ $Th. Motzkin$, The lines and planes connecting the points of a finite set. Transactions of the American Mathematical Society 70 (1951) 451-464. *Motzkin* *Gallai* tételének érdekes többdimenziós általánosításait is tárgyalja.

¹⁴ $W. O. J. Moser$ kanadai matematikus, a manitobai egyetemen, Winnipegben professzor.

¹⁵ $L. M. Kelly$ and $W. O. J. Moser$, On the number of ordinary lines determined by n points, Canadian journal of Mathematics, 10 (1958) 210-219.

tetszőleges egyenese, mely a P_i , $1 \leq i \leq k$ pontok egyikén sem megy át. A $(P_i; P_j)$ $1 \leq i, j \leq k$ egyenesek – számuk $\binom{k}{2}$ – az e egyenest a $P_{k+1}, \dots, P_{k+\binom{k}{2}}$ pontokban metszik. A többi $n - k - \binom{k}{2}$ pontot az e egyenesen tetszőlegesen vesszük fel. Könnyű belátni, hogy ez az n pont

$$1 + k(n - k) - \binom{k}{2} = kn - \frac{1}{2}(3k + 2)(k - 1)$$

egyenest határoz meg.

Legyen mármost $k = 2$. – (1) és (2) igazolja sejtésemet, ha $n \geq 27$. *Kelly* és *Moser* kimutatták, hogy sejtésem $n = 10$ -re is igaz (azaz 10 pont, melyek közül nincs 9 egyenesen, legalább 16 egyenest határoz meg), s sejtik, hogy a $11 \leq n \leq 26$ értékekre is igaz. Bebizonyították továbbá, hogy ha $n = 7, 8, 9$, akkor legalább $2n - 5$ egyenest nyerünk, s láttuk (2. c), d) ábra és 3. ábra), hogy $2n - 5$ nem is javítható.

6. *Kelly* és *Moser* eredményei azonban még nem intézik el teljesen az itt felmerülő problémákat. Nyilvánvaló pl., hogy létezik egy oly c_k szám, hogy ha adva van n pont, melyek közül legfeljebb $n - k$ van egy egyenesen, akkor e pontok legalább $c_k kn$ egyenest határoznak meg, például vehetjük c_k -t $1/k$ -nak. (2)-ből c_k -ra ennél lényegesen jobb becslést kaphatunk, de különböző k -ra különböző c_k értékeket. A kérdés azonban az, hogy van-e oly c szám, mely minden k -ra jó. Azaz valószínűleg igaz a következő sejtés: Létezik oly c állandó, (mely nem függ sem k -tól, sem n -től), hogy ha az n pont közül legfeljebb $n - k$ van egy egyenesen, akkor a fellépő egyenesek száma nagyobb, mint ckn (feltehető, hogy a sejtés igaz, ha $c = 1/10$).

Említsük meg még *Dirac* következő sejtését: Legyen $P_1, \dots, P_n$ n pont a síkban, melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor mindig van egy pont P_i úgy, hogy a $(P_i; P_j)$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$ egyenesek közül legalább $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ különböző van.

Megemlítjük még, hogy *Sylvester* a következő kérdést vizsgálta: Legyen adva n pont, $P_1, P_2, \dots, P_n$ a síkban. Maximálisan hány olyan egyenes lehetséges, mely e pontok közül pontosan hármon megy át? Kimutatta, hogy $n = 9$ -re e maximum 10. Könnyű belátni, hogy általában n -re e maximum nem nagyobb, mint $\frac{1}{3} \binom{n}{2}$ (ennyi volna, ha minden

$P_i P_j$ egyenesen 3 pont volna) és *Gallai* tétele miatt e maximum semmilyen n -re nem érheti el az $\frac{1}{3} \binom{n}{2}$ értéket. Páros

n -re e maximum legfeljebb $\frac{1}{3} \binom{n}{2} - \frac{n}{6}$. (Ez abból látható be, hogy minden ponton kell olyan egyenesnek átmennie ez esetben, amin páros számú P_i pont van.) E tételek részletes bizonyítását az olvasóra bízom. Nagyon meglepő azonban, hogy *Sylvester* kimutatta, hogy e maximum nagyobb, mint $\frac{1}{3} \binom{n}{2} - cn$, ahol c alkalmas, n -től nem függő állandó.

Kérdezhetjük még azt is, hogy mekkora azon egyenesek maximális száma; amelyek az n pont közül pontosan négyen mennek át. Ezt csak n speciális értékeire vizsgálták, és én azt hiszem, hogy nagy n -re e maximum sokkal kisebb nagyságrendű lesz, mint n^2 , talán kisebb, mint cn , egy alkalmas c állandóval.

7. Most rátérek e kérdések kombinatorikus általánosításaira. Legyenek $a_1, \dots, a_n$ elemek, $A_1, \dots, A_m$ az elemekből alkotott, legalább kételemű csoportok (szokásos szakkifejezéssel halmazok). Feltesszük, hogy minden $(a_i; a_j)$ pár egy és csakis egy A_i -ben fordul elő. Ha az a_i -k pontok, és az A_j -k azon egyenesek, melyek e pontok közül legalább kettőn átmennek, akkor nyilván e feltételt kielégítő rendszert kapunk. Azonban könnyű belátni, hogy lehet olyan a_i , $1 \leq i \leq n$, A_j , $1 \leq j \leq m$ rendszert csinálni, mely nem valósítható meg, mint a sík pontjai és egyenesei. Legyen ugyanis $n = m = 7$, és az A -k: (a_1, a_2, a_3) , (a_1, a_5, a_6) , (a_1, a_4, a_7) , (a_2, a_4, a_6) , (a_2, a_5, a_7) , (a_3, a_4, a_5) , (a_3, a_6, a_7) . E rendszer nyilván nem valósítható meg a síkban, ti. e rendszernek nincsen közös egyenese, azaz nincs oly A_j , mely pontosan két a_i -t tartalmaz.

Ennek ellenére fennáll a következő tétel: Ha $m > 1$, akkor $m \geq n$ – azaz ha az A -k száma nagyobb, mint egy, akkor legalább n A van. Ez lényeges általánosítása annak a tételnek, hogy n pont a síkban, ha nincs mind egy egyenesen, legalább n egyenest határoz meg.

E tételt *Hanani*¹⁶ bizonyította be először 1938-ban. Én *Hanani* eredményéről nem tudva, 1941-ben újra felfedeztem e tételt, melyet *Szekeres*¹⁷ is bebizonyított. A legegyszerűbb bizonyítás *de Bruijn*-tól való, melyet most közlök.

8. Két elem a_{i_1} és a_{i_2} nyilván egyértelműen meghatároz egy A halmazt, és pedig azt, amely az $(a_{i_1}; a_{i_2})$ párt tartalmazza. Feltevésünk szerint egy és csakis egy ily A van. Hogy röviden tudjam magam kifejezni, az a_i elemeket pontoknak fogom nevezni s az A_j halmazokat utaknak.

Jelöljük az a_i ponton átmenő utak számát k_i -vel, az A_j úton levő pontok számát s_j -vel. Nyilván $1 < k_i < n$, és $1 < s_j < n$, minthogy a pontok nincsenek mind egy út mentén, és minden úton legalább két pont van.

A k_i -k és s_j -k közt könnyen találhatunk egy összefüggést p1. a következő szemléletes megfontolással: képzeljük az utakat villamosvonalaknak, amelyeknek minden pontban (keresztveződnél) megállójuk van¹⁸. Egy alkalommal minden vonalon végighaladt egy villamos, és mindegyikre minden megállónál egy utas szállt fel. Ekkor az a_i keresztveződnél

¹⁶ H. Hanani izraeli matematikus, kollégám a haifai műegyetemen.

¹⁷ Szekeres György Ausztráliában működő magyar matematikus.

¹⁸ Az a_i -k és A_j -k mindig szemléltethetők ilyen (általában nem egyenes) villamosvonalakkal. Ezeknek esetleg a kijelölt pontokon kívül is lesz keresztveződésük, de mi csak a kijelöltekkel foglalkozunk.

k_i felszálló volt, az A_j vonalon s_j utas utazott, tehát az összes utasokat egyrészt útvonalak, másrészt állomások szerint összeszámolva a következő azonosságot kapjuk:

$$(3) \quad s_1 + s_2 + \dots + s_n = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

Feltehetjük, hogy a pontok a rajtuk átmenő utak csökkenő száma szerint vannak rendezve, tehát

$$(4) \quad k_n \leq k_i, \quad \text{ha} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

továbbá, hogy az a_n -en az $A_1, A_2, \dots, A_{k_n}$ utak mennek át. Jelöljük k_n -et, miután sok szó lesz még róla, rövidebben v -vel.

Keressünk összefüggéseket a k -k és s -ek közt. Ha az A_j út nem megy át az a_i ponton, akkor a_i -t A_j minden egyes pontjával más-más út köti össze, mert különben volna két olyan út, amelyek két különböző pontban találkoznak, pedig feltettük, hogy ilyen nincs. Így, ha A_j nem megy át a_i -n, akkor

$$(5) \quad k_i \geq s_j.$$

Ezt alkalmazhatjuk k_n és $s_{v+1}, s_{v+2}, \dots, s_m$ -re:

$$k_n \geq s_j \quad (j = v+1, v+2, \dots, m).$$

Ezeket összeadva

$$(6) \quad (m-v)k_n \geq s_{v+1} + s_{v+2} + \dots + s_m.$$

Az $s_1, s_2, \dots, s_v$ -t is tudjuk becsülni k -kkal (5) alapján, ugyanis A_1 átmegy egy a_n -től különböző ponton – feltehetjük, hogy ezt jelöltük a_1 -gyel –, mert minden út legalább két ponton halad át. Ekkor $A_2, \dots, A_v$ nem mehet át a_1 -en, mert két út legfeljebb egy pontban találkozik, így (5) szerint fennáll pl.

$$k_1 \geq s_2.$$

De A_2 is átmegy egy a_n -től (és a_1 -től) különböző ponton, mondjuk a_2 -n. Ezen $A_3, \dots, A_v$ nem megy át, tehát pl.

$$k_2 \geq s_3.$$

Hasonlóan haladva tovább, végül az A_{v-1} -en találunk egy a_n -től különböző a_{v-1} pontot, amelyen A_v nem megy át, A_v -n pedig egy a_v pontot, amin az előző A_i -k, pl. A_1 nem megy át. Így (5) alapján a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$k_1 \geq s_2, \quad k_2 \geq s_3, \dots, \quad k_{v-1} \geq s_v, \quad k_v \geq s_1.$$

Ezeket összeadva és hozzájuk adva (6)-ot, azt kapjuk, hogy

$$k_1 + k_2 + \dots + k_v + (m-v)k_n \geq s_1 + s_2 + \dots + s_m.$$

Írjuk itt be a jobb oldal helyébe (3) jobb oldalát, majd alkalmazzuk $k_{v+1}, k_{v+2}, \dots, k_n$ -re (4)-et, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_v + (m-v)k_n &\geq k_1 + k_2 + \dots + k_n \geq \\ &\geq k_1 + k_2 + \dots + k_v + (n-v)k_n. \end{aligned}$$

Innen

$$(m-v)k_n \geq (n-v)k_n,$$

és mivel $k_n > 1$,

$$m \geq n.$$

Ezzel bebizonyítottuk *Hanani* tételét.

9. Az egyenesekre tárgyalt problémához hasonlóak körökkel kapcsolatban is felmerülnek. Érvényes *Gallai* tételének következő általánosítása: Legyenek adva a síkban a $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontok ($n > 3$), amelyek nincsenek mind egy körön, akkor van olyan kör, amelyik pontosan három P_i -n megy át. A tétel (mely említve van a ¹³ lábjegyzetben idézett cikkben), *Gallai* tételéből könnyen következik az inverzió, más néven körre vonatkozó tükrözés nevű transzformáció segítségével.¹⁹ Tegyük fel ugyanis, hogy a tétel nem volna igaz. Ekkor volna egy olyan pontrendszer, amelynek bármely három pontján átmenő kör egy negyedek P_i -n is átmenne, így többek közt minden (P_1, P_i, P_j) ponthármason átmenő kör átmenne egy negyedek P_k ponton is. Alkalmazzunk ekkor inverziót egy P_1 középpontú körre, a P_i pont képét jelöljük Q_i -vel ($i = 2, 3, \dots, n$). Ebben a pontrendszerben a Q_iQ_j egyenes a P_1, P_i, P_j pontokon átmenő kör

¹³

¹⁹ Ez a sík egy olyan átalakítása, amelynél egy adott kör pontjai helyben maradnak, a kör középpontjának nincs megfelelője, és minden ezen a középponton átmenő kör egy egyenesbe megy át.

képe, s így feltétel szerint átmegy legalább még egy Q_k ponton. Ez azonban *Gallai* tétele szerint csak úgy lehet, ha $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ mind egy egyenesen van, de ez az egyenes akkor egy P_1 -en is átmenő kör képe volna, holott feltétel szerint nincs az összes P_i egy körön. Lehetetlenségre jutottunk, kell tehát, hogy a körökre vonatkozó tétel is igaz legyen.

Nem látszik azonban könnyűnek a következő kérdés, melyet évekkkel ezelőtt felvetettem: Legyen adva n pont a síkban, melyek nincsenek mind egy körön. Tekintsük az összes köröket, melyek a pontok közül három átmennek. Igaz-e, hogy így legalább $1 + \binom{n-1}{2}$ kört kapunk? Ha $n-1$ pont egy körön van, akkor pontosan $1 + \binom{n-1}{2}$ kört kapunk.

A megfelelő kombinatorikus általánosítás így hangzik: Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n$ n elem, $A_1, \dots, A_m, m > 1$ az a -kból alkotott legalább három elemű halmazok úgy, hogy mindegyik az a_i -kből álló hármas egy és csakis egy A -ban fordul elő. Mekkora m minimális értéke? – A párok esetén a geometriai és a kombinatorikus probléma megoldása, amint láttuk, ugyanaz volt, minimális értéke mindkét esetben n . Valószínű azonban, hogy ternók (három elemű halmazok) esetén m minimuma a kombinatorikus esetben kisebb, mint a geometriai problémánál. *Hanani* bebizonyította a következőt: Adjunk meg tetszőlegesen egy kis ε pozitív számot; ehhez mindig található egy n_0 úgy, hogy ha $n > n_0$, és adva van n elem, $a_1, a_2, \dots, a_n$, akkor m értéke a kombinatorikus problémánál kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$(7) \quad m > (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[4]{8}}.$$

Hanani bizonyítása, mely eddig még nem jelent meg nyomtatásban, a következő: Legyen az A_i halmaz elemeinek a száma s_i . Feltehetjük, hogy a halmazokat pl. a bennük levő elemek száma szerint csökkenő sorrendbe rendeztük, tehát

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m.$$

Az összes hármasok száma, amiket az n elemből képezhetünk,

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Ezek mindegyike előfordul egy halmazban és csak egyben, viszont az i -edik halmazban

$$\binom{s_i}{3} = \frac{s_i(s_i-1)(s_i-2)}{6}$$

hármas fordul elő, így

$$\binom{n}{3} = \binom{s_1}{3} + \binom{s_2}{3} + \dots + \binom{s_m}{3} \leq m \binom{s_1}{3},$$

amiből

$$m \geq \frac{\binom{n}{3}}{\binom{s_1}{3}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{s_1(s_1-1)(s_1-2)} > \frac{n^3}{s_1^3},$$

minthogy $s_1 < n$ miatt $\frac{n}{s_1} < \frac{n-1}{s_1-1} < \frac{n-2}{s_1-2}$. Ebből következik (7) abban az esetben, ha

$$s_1 \leq \sqrt[4]{2}\sqrt{n} = \sqrt[4]{2n^2}.$$

Arra az esetre, ha s_1 ennél nagyobb érték, gondoljuk meg mindennek előtt, hogy A_1 elemei közül egyrészt a többi A_i mindegyike legfeljebb 2-t tartalmazhat, mert minden hármas csak egy A_i -ben fordul elő, másrészt minden A_1 -ben szereplő elempár legalább még egy A_i -ben előfordul, mert különben a kérdéses elempárból és egy A_1 -ben nem szereplő elemből álló hármasok egy halmazban sem szerepelnének. Mivel A_1 elemeiből $\binom{s_1}{2}$ pár képezhető, így A_1 -en kívül legalább még ennyi halmazunk van:

$$m \geq 1 + \binom{s_1}{2} > \frac{s_1(s_1-1)}{2} = \frac{s_1^2}{2} \left(1 - \frac{1}{s_1}\right).$$

Ez abban az esetben adja (7)-et, ha s_1 elég nagy, és n elég nagy; pl. ha $s_1 \geq \sqrt[4]{2n^3}$, akkor

$$m > \frac{\sqrt[4]{2n^3}(\sqrt[4]{2n^3}-1)}{2} = \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2n^3}}\right);$$

s így teljesül (7), ha n elég nagy (pl. ha $\frac{1}{\sqrt[4]{2n^3}} < \varepsilon$, tehát $n > \sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon^4}}$).

Ha végül

$$(8) \quad \sqrt[4]{2n^2} < s_1 < \sqrt[4]{2n^3},$$

akkor vizsgáljuk meg azt is, hány halmazban kell egy A_1 -beli elempárnak előfordulnia ahhoz, hogy minden hármas szerepelhessen, amely ebből a párból és még egy, A_1 -ben nem szereplő elemből áll.

Egy-egy A_1 -beli párból $n - s_1$ számú ilyen hármas alkotható, mert ennyi elem nem szerepel A_1 -ben. Másrészt egy A_i -nek, amely két A_1 -beli elemet tartalmaz, emellett legfeljebb $s_1 - 2$ további eleme lehet, mert nem lehet s_1 -nél több eleme. Így ahhoz, hogy egy A_1 -beli párt tartalmazó összes hármas előfordulhasson, ennek a párnak A_1 -en kívül még legalább $\frac{n - s_1}{s_1 - 2}$ halmazban kell előfordulnia. Mivel A_1 elemeiből $\binom{s_1}{2}$ pár alkotható, így

$$\begin{aligned} m &\geq 1 + \binom{s_1}{2} \frac{n - s_1}{s_1 - 2} > \frac{s_1(s_1 - 1)(n - s_1)}{2(s_1 - 2)} > \frac{s_1(n - s_1)}{2} = \\ &= \frac{\frac{n^2}{4} - \left(\frac{n}{2} - s_1\right)^2}{2}. \end{aligned}$$

A (8) feltételnek eleget tevő s_1 értékek kisebbek $n/2$ -nél, ha $n \geq 32$, az ilyen n -ekre tehát csökkentjük a nyert kifejezés értékét, ha s_1 -et nála kisebb számmal helyettesítjük. Eszerint a (8) alatti s_1 értékekre (a nyert korlát jobban kezelhető utolsó előtti alakját használva)

$$m > \frac{\sqrt[4]{2n^2} \left(n - \sqrt[4]{2n^2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[4]{8}} - \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[4]{8}} \left(1 - \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{n}}\right).$$

Ezek szerint a (8) feltételnek eleget tevő s_1 értékekre is teljesül (7), amint n elég nagy $\left(\text{egyrészt } n \geq 32, \text{ másrészt } \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{n}} < \varepsilon, \text{ azaz} \right.$

Az n -re adódott korlátok közül a legnagyobbat választva n_0 -nak, bármekkora is s_1 , mindig teljesül (7), amint $n > n_0$. Ezzel *Hanani* tételét bebizonyítottuk.

Hanani azt is bebizonyította, hogy ha $n = u^2 + 1$, ahol u prímszámhatvány, akkor

$$(9) \quad m \leq u(u^2 + 1) \lfloor n\sqrt{n-1} \rfloor.$$

Hanani sejti, hogy itt $m = u(u^2 + 1)$. (7) és (9)-ből az analitikus számelmélet eszközeivel könnyen belátható, hogy a kombinatorikus problémánál m minimumának nagyságrendje $n^{3/2}$, pontosabban minden pozitív ε -hoz van oly n_0 , hogy ha $n > n_0$, akkor

$$(10) \quad (1 - \varepsilon) 2^{-3/4} n^{3/2} < m < (1 + \varepsilon) n^{3/2}.$$

(10) bal oldalát már bebizonyítottuk, a jobb oldallal itt nem foglalkozhatunk. E problémákat hármasokról l -esekre is általánosíthatjuk minden $l > 3$ esetén, de ezzel most nem foglalkozunk.

Erdős Pál