

1. feladat. $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = ?$

I. megoldás. A kérdéses szám pozitív és négyzete:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} \right)^2 &= 7+4\sqrt{3} + 2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} + \\ &+ 7-4\sqrt{3} = 14 + 2\sqrt{49-48} = 16, \end{aligned}$$

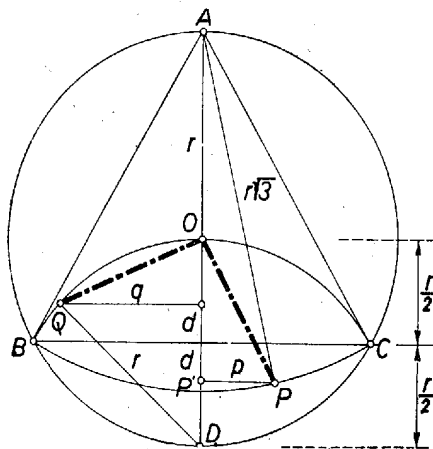
tehát a kifejezés értéke $\sqrt{16} = 4$.

II. megoldás. Észrevehetjük, hogy $7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$, és $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$. Mivel itt $2 > \sqrt{3}$, így

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4.$$

2. feladat. Legyen az ABC szabályos háromszög köré írt kör középpontja O , és a kör A pontjából kiinduló átmérő-jének másik végpontja D . Rajzoljuk meg az A , illetőleg a D középpontú (félkörnél kisebb) BC köríveket. Legyen e két körív egy-egy pontja P , illetőleg Q . Bizonyítsuk be, hogy ha P és Q pontok egyenlő távol vannak a BC oldaltól, akkor egyenlő távol vannak az O ponttól is.

Megoldás. Legyen P , ill. Q vetülete az AD átmérőn P' , ill. Q' , és jelöljük a háromszög köré írt kör sugarát r -rel. Így a D középpontú BC körív sugara szintén r , a háromszög oldalának és az A középpontú BC körív sugarának hossza pedig $AB = r\sqrt{3}$. P és Q -nak BC -től mért (egyenlő) távolságát jelöljük d -vel, míg AD -től mért távolságuk legyen $PP' = p$ és $QQ' = q$.



Kifejezzük OP és OQ hosszát r -rel és d -vel és az így nyert kifejezéseket összehasonlítjuk. Az OPP' és az APP' derékszögű háromszögből

$$OP^2 = \left(\frac{r}{2} + d \right)^2 + p^2, \quad p^2 = (r\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3r}{2} + d \right)^2,$$

és így

$$OP^2 = 3r^2 + \left(\frac{r}{2} + d \right)^2 - \left(\frac{3r}{2} + d \right)^2 = 3r^2 - r(2r + 2d) = r(r - 2d).$$

Hasonlóan az OQQ' és a DQQ' derékszögű háromszögből

$$\begin{aligned} OQ^2 &= \left(\frac{r}{2} - d \right)^2 + q^2, \\ q^2 &= r^2 - \left(\frac{r}{2} + d \right)^2, \end{aligned}$$

és így

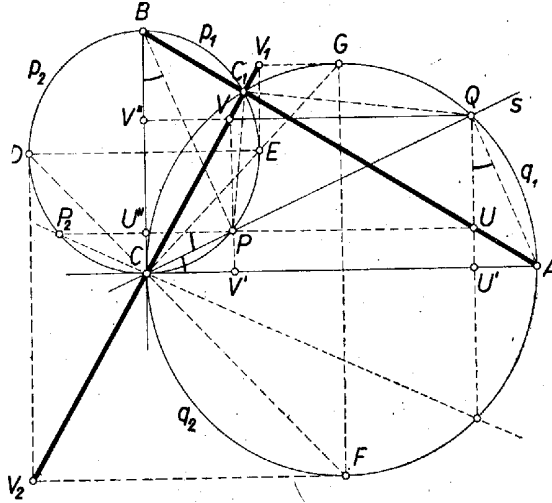
$$OQ^2 = r(r - 2d) = OP^2.$$

Miután OP és OQ értelemszerűen pozitívak, eredményünk a feladat állítását bizonyítja.

Megjegyzés. Ha P és Q mindegyikét a felhasznált köröknek a félkörnél nagyobb ívén vesszük fel a BC egyenestől egyenlő távolságban, akkor hasonló számítással ismét azt nyerjük, hogy P és Q egyenlő távolságra van O -tól is.

3. feladat. Egy derékszögű háromszög befogói mint átmérők fölé köröket rajzolunk. A derékszög csúcson átmenő tetszőleges egyenesnek a körökkel való második metszéspontja legyen a P , illetőleg Q pont. Mi azon derékszögű háromszögek harmadik csúcsainak mértani helye, melyeknek átfogója a PQ szakasz, befogói pedig párhuzamosak az adott háromszög befogóival?

Megoldás. Legyen az ABC derékszögű háromszög CB , CA befogója fölé írt kör p , ill. q , és messe ezeket a C -n átmenő s egyenes másodszor P , Q -ban. PQ mint átfogó fölé a CB , CA -val párhuzamos befogókkal két derékszögű háromszöget szerkeszthetünk, legyenek ezek csúcsai U és V úgy, hogy $PU \parallel CA$ és $QU \parallel CB$, ill. $PV \parallel CB$ és $QV \parallel CA$. A keresett mértani helyet mindazok és csak azok a pontok alkotják, amelyek akár U , akár V gyanánt fellépnek, mialatt s minden lehetséges helyzetét felveszi, azaz C körül 180° -kal elfordul.



Tekintsük az U csúcsok mértani helyét. Néhányukat megszerkesztve mindegyiket az AB átfogón kapjuk. Megmutatjuk, hogy az U pontok mértani helye az AB szakasz. E szakasz meghosszabbításaira nem eshet U pont, hiszen a p -n fekvő P , és vele U sem juthat távolabb CA -tól, mint B és CA -nak csak azon az oldalán lehet, mint B , továbbá a q -n fekvő Q -val együtt U nem juthat távolabb CB -től, mint A , a CB -nek azon az oldalán van, mint A .

Legyen U vetülete CA -ra, CB -re U' , U'' . Megmutatjuk, hogy s helyzetétől függetlenül $U'U : U'A = CB : CA$; ebből következik, hogy $U'AU$ és CAB derékszögű háromszögek hasonlóak, és ebből $U'AU \sphericalangle = CAU \sphericalangle = CAB \sphericalangle$, tehát AU egyenes egybeesik AB -vel. – Thalész tétele szerint BP és AQ merőlegesek s -re, és ezért a PCU'' , BCP , CAQ , QAU' derékszögű háromszögek hasonlóak, mert megfelelő hegyes szögeik vagy közösek, vagy párhuzamos, vagy merőleges szárúak, és így egyenlők. Másrészt a $CU'UU''$ négyszög téglalap, ezért

$$\frac{U'U}{U'A} = \frac{CU''}{U'A} = \frac{CP}{AQ} = \frac{CB}{AC},$$

amit bizonyítani akartunk.

Ha $s \equiv CA$, akkor $P \equiv C$ és $Q \equiv A$, tehát $PQ \equiv CA$, e helyzetben $U \equiv A \equiv Q$, a PQU háromszög nem létezik, tehát az A pont csak tágabb értelemben tartozhat a mértani helyhez. Hasonlóan $s \equiv CB$ esetén sincs háromszög, mert $PQ \equiv BC$ és $U \equiv C$. Végül akkor sem jön létre a $PQU\Delta$, ha s átmegy p és q második közös pontján – ami nyilván C -nek AB -re való C_1 vetülete –, mert ekkor $P \equiv Q$.

Fordítva megmutatjuk, hogy ha U az AB szakasznak C_1 -től különböző tetszés szerinti belső pontja, akkor van s -nek olyan helyzete, amely éppen ezen U -hoz vezet, és pedig 2 ilyen helyzet is van és ezek CA -ra (egyszersmind CB -re is) tükrösek. Legyen p , q -nak a 90° -os ACB szögtartományba – röviden: γ -ba – eső félköre p_1 , q_1 , és a másik félköre p_2 , q_2 . Messe az U -n átmenő, CA -val párhuzamos egyenes p_1 -et, CB -t, p_2 -t rendre P , U'' , P_2 -ben. A mértani helynek az s egyenes CP és CP_2 helyzetéhez tartozó pontja rajta van PU'' -n és a már bizonyítottak szerint az AB egyenesen, tehát éppen a kiindulásul választott U pont.

Mivel P és P_2 a BC tengelyre tükrös pontpár, azért P_2C a PC tükörképe a BC tengelyre s ekkor egyben a BC -re merőleges AC tengelyre is.

$U \equiv A$ esetén $P \equiv P_2 \equiv C$; $Q \equiv A$, $PQ \equiv CA$; ugyanígy $U \equiv B$ esetén $PQ \equiv BC$, e helyzetekhez nem tartozik PQU háromszög. Bizonyításunknak a P_2 -re vonatkozó része azonban $U \equiv C_1$ -re is érvényes.

Ezek szerint az U pontok mértani helye valóban az AB átfogószakasz, kétszer számítva, de a végpontok nélkül, és C_1 -et csak egyszer számítva.

Egész hasonlóan járhatunk el a V pontok mértani helyének meghatározására is. Jelöljük V -nek CA , CB -re való vetületét V' , V'' -vel. Ekkor a fenti hasonlóságok felhasználásával

$$\frac{V'C}{V'V} = \frac{PU''}{U'Q} = \frac{PC}{QA} = \frac{CB}{CA},$$

tehát a VCV' és ABC derékszögű háromszögek hasonlóak, és így $VCV' \sphericalangle = ABC \sphericalangle = C_1CA \sphericalangle$.

Ha már most P a p_1 félkörön van, és így Q a q_1 -nek pontja, akkor V a γ -ban fekszik, V' a CA -n van, tehát a nyert egyenlőségből $VCA \triangleleft = C_1CA \triangleleft$, vagyis VC azonos a C_1C egyenessel, V a C_1C -n fekszik. Ha P a p_2 félkörön, és ezért Q a q_2 -n van, akkor V a γ csúcshelytartományában van, V' a CA -nak C -n túli meghosszabbításán, tehát egyenlőségünk szerint VCV' és C_1CA csúcshögek, ezért V ekkor is a C_1C egyenesen van. C_1C merőleges AB -re.

Legyen p -nek CA -val, q -nak CB -vel párhuzamos átmérője DE , ill. FG , E a p_1 -en, G a q_1 -en. Ekkor P -nek és vele V -nek CB -től legnagyobb távolsága mindkét oldalon $DE/2 = BC/2$. Ha $P \equiv E$, akkor $PCB \triangleleft = 45^\circ = PCA \triangleleft$, ezért CP a q_1 -et $Q \equiv G$ -ben metszi, amely q -nak CA -tól ugyancsak legtávolabbi pontja; az ezekhez tartozó V -helyzet legyen V_1 . Ha pedig P a D -ben van, akkor Q az F -be jut, az ezekhez tartozó V_2 a másik oldalon van a lehető legtávolabbi CB , ill. CA -tól. Ezekkel a fentiekhez hasonlóan megmutatható, hogy a V pontok mértani helye a V_1V_2 szakasz, kétszer számítva, de kihagyva C -t, és csak egyszer számítva a C_1 , V_1 , V_2 pontokat. Könnyű belátni, hogy $V_1V_2 = AB$ és C felezi V_1V_2 -t. Ha az ABC háromszög egyenlő szárú, akkor $C_1 \equiv E \equiv G$, és ez a pont nem szerepelhet V gyanánt.

Mindezek szerint valamennyi vizsgált derékszögű háromszög harmadik csúcának mértani helye – míg s minden lehetséges helyzetét felveszi – tágabb értelemben az AB átfogó és az a rá merőleges, vele egyenlő hosszú V_1V_2 szakasz, melynek felezőpontja C , mindkettő kétszer számítva. Szigorúan véve – ha ti. az egyenesszakasszá, ponttá fajuló háromszögeket nem tekintjük – A , B , C nem tartoznak a mértani helyhez, V_1 és V_2 csak egyszer számítandók, a két szakasz C_1 metszéspontja általában összesen kétszer, kivéve a $CA = CB$ esetet, amikor $C_1 \equiv V_1$, és ezért csak egyszer számítható.

Megjegyzések. 1. A verseny rövid ideje alatt természetesen nem volt várható, hogy a versenyzők a fenti finomabb diszkussziót is kidolgozzák. Mulasztás lenne viszont, ha itt erre nem tértünk volna ki.

2. Azt, hogy U az AB -n, V a V_1V_2 -n van, ugyancsak szögek egyenlősége alapján, de hasonló háromszögek felhasználása nélkül is beláthatjuk. Ezt csak U esetére és olyan helyzetre vázoljuk, amelyben P a p_1 -beli CC_1 íven van, és így Q a q_1 -beli AC_1 ív pontja. AQC_1C és BC_1PC húrnégyszögek, ezért $PC_1Q \triangleleft = PC_1A \triangleleft + AC_1Q \triangleleft = PCB \triangleleft + ACQ \triangleleft = ACB \triangleleft = 90^\circ$. Másrészt szerkesztésként fogva $PUQ \triangleleft = 90^\circ$, így $PUQC_1$ húrnégyszög. Ennélfogva $UC_1Q \triangleleft = UPQ \triangleleft$, és ez folytatólag egyenlő $ACQ \triangleleft$ -gel – mert $PU \parallel CA$ –, végül $AC_1Q \triangleleft$ -gel. Eszerint C_1Q -val C_1U és C_1A egyenlő szöget zár be, tehát U a C_1A egyenesen van. – Húrnégyszögek felhasználásával igazolható fordítva az is, hogy AB és V_1V_2 bármely pontja hozzátartozik a mértani helyhez. Ezt és a további helyzetek vizsgálatát az olvasóra bízuk.