

1. feladat. Oldjuk meg x -re a következő egyenletet:

$$\frac{p}{q} - \frac{px}{qx-1} = \frac{q}{p} - \frac{qx}{px-1}.$$

p és q milyen értékeinél van gyöke az egyenletnek?

Megoldás. Az egyenletnek nincs értelme, ha valamelyik nevező 0; feltesszük tehát, hogy $p \neq 0$, $q \neq 0$, és nem fogadunk el olyan p, q számpárt, amelyből $px-1=0$, $qx-1=0$, vagyis $px=1$, $qx=1$ adódik. A nevezők szorzatával szorozva

$$p^2(qx-1)(px-1) - p^2qx(px-1) = q^2(qx-1)(px-1) - pq^2x(qx-1).$$

A zárójelek felbontása, rendezés és összevonás után x -re elsőfokú egyenletet kapunk:

$$(p^3 - q^3)x = p^2 - q^2.$$

Ha $p = q$, akkor ez az egyenlet – és természetesen az eredeti is – minden x -re teljesül, nincs határozott, egyértelmű megoldás. Ha $p \neq q$, akkor $p^3 - q^3 \neq 0$ -val osztva és $p - q$ -val egyszerűsítve:

$$x = \frac{p+q}{p^2+pq+q^2}.$$

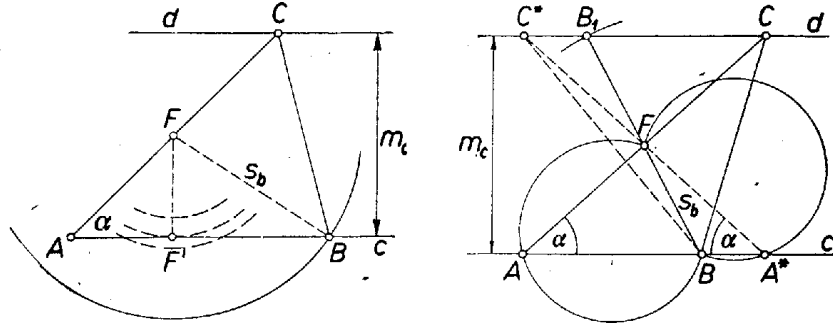
Ezzel az egyenletet megoldottuk. Látható, hogy

$$px = \frac{p^2+pq}{p^2+pq+q^2} = 1$$

csak $q = 0$ mellett, $qx = 1$ pedig csak $p = 0$ mellett következne be. Ezeket már kizártuk, tehát az egyenletnek mindig van határozott gyöke, ha $p \neq 0$, $q \neq 0$, és $p \neq q$.

2. feladat. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha ismerjük A -nál levő szögét, B -ből kiinduló súlyvonalát és C -ből kiinduló magasságvonalát. Magyarázzuk meg a szerkesztés minden lépését.

I. megoldás. Legyen az adott magasság m_c , a súlyvonal s_b , A C csücsöt az α szög $AB = c$ szárától m_c távolságra haladva d párhuzamos metszi ki a másik szárból. Az AC oldal F felezőpontjából s_b sugárral rajzolt kör kimetszi az α szög c szárától a B csücsöt.



A feladat megoldhatóságának eleve feltétele, hogy $0 < \alpha < 180^\circ$ legyen. Így C mindig egyértelműen szerkeszthető. A feladatnak 1, 2, 1, vagy 0 megoldása van aszerint, hogy a használt körív az α szög másik szárát 1, vagy 2 pontban metszi, vagy érinti, vagy nem is érinti. Az F pont merőleges vetületét AB -n F' -vel jelölve $\alpha < 90^\circ$ mellett az említett négy eset valamelyike aszerint áll fenn, hogy

$$s_b \geq FA, \quad FA > s_b > FF', \quad s_b = FF', \quad s_b < FF' \quad (FF' = m_c/2).$$

Ha $\alpha \geq 90^\circ$, akkor legfeljebb 1 megoldás van, $s_b > FA$ mellett.

II. megoldás. B -nek F -re vett B_1 tükörképe a C -n át AB -vel párhuzamos d egyenesen van. Ebből adódik a következő szerkesztés.

Felveszünk két egymástól m_c távolságra fekvő c és d párhuzamost és c -n a B csücsöt. A B -körüli $2s_b$ sugarú körívvel d -ből kimetszük B_1 -et. BB_1 -nek F felezőpontja és a B pont alkotta szakasz A -ból α szög alatt látszik, tehát az A csücs a c egyenes és a BF fölé rajzolt α nyílású látószögekörív pár metszéspontja. Végül A tükörképe F -re C .

Ha $2s_b < m_c$, akkor B_1 nem szerkeszthető, a feladatnak nincs megoldása. Ha $2s_b \geq m_c$, akkor 2, 1, vagy 0 a megoldások száma aszerint, hogy a BF fölé rajzolt két körív mindegyike metszi c -t a B -től különböző pontban, vagy csak egyikük, vagy egyikük sem.

3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 7-tel osztható háromjegyű szám utolsó két számjegye egyenlő, akkor számjegyeinek összege is osztható 7-tel.

I. megoldás. A feladat teljes értékű megoldásának számít, ha a két egyenlő jegyre végződő háromjegyű számok közül kikeressük az összes 7-tel oszthatókat és mindezeket ellenőrizzük, hogy számjegyeik összege valóban osztható-e 7-tel. (Ilyen eljárást azonban csak akkor ügyes használni, ha valamilyen rendszerezéssel munkamegtakarítást tudunk elérni az egyenkénti kikereséssel szemben.)

A kérdéses számok kiválogatását könnyűvé teszi a következő észrevétel. A számokat két rész összegére bontva: a százasra és a két egyenlő jeggel írt számra, ezeknek 7-tel való osztási maradéka vagy mindkét részben 0, vagy összegük 7. (Pl. $322 = 7 \cdot 46$ -ban 300 és 22-nek 7-es maradéka 6, illetőleg 1.) Állítsuk tehát össze, mely két egyenlő jeggel írt számok adnak 7-tel osztva 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 maradékot, másrészt, hogy mely kerek százasok adnak rendre 0, 6, 5, 4, 3, 2, 1 maradékot, ezek összeadásából megkapjuk valamennyi szóban forgó számot.

Maradék	Végződés	Maradék	Százas	A szám	A jegyek összege
0	00, 77	0	700	700, 777	7, 21
1	22, 99	6	300	322, 399	7, 21
2	44	5	600	644	14
3	66	4	200, 900	266, 966	14, 21
4	11, 88	3	500	511, 588	7, 21
5	33	2	100, 800	133, 833	7, 14
6	55	1	400	455	14

Valóban valamennyi számban a számjegyek összege osztható 7-tel.

II. megoldás. Legyen a szóban forgó háromjegyű szám $\overline{abb} = 100a + 10b + b = 100a + 11b$, így számjegyeinek összege $a + 2b$. Tegyük fel, hogy $N = 100a + 11b$ 7-nek többszöröse, be kell bizonyítanunk, hogy akkor $a + 2b$ is osztható 7-tel. Vonjuk ki N -ből a 7-tel szintén osztható $98a + 7b$ -t, a maradék: $2a + 4b = 2(a + 2b)$ szintén osztható 7-tel. Mivel 7 és 2 relatív prím számok, ez csak úgy lehetséges, ha $a + 2b$ osztható 7-tel.¹

Megjegyzések. 1. A II. megoldás bizonyítása meg is fordítható, és így igaz a következő állítás: ha egy háromjegyű szám utolsó két jegye megegyezik, és számjegyeinek összege osztható 7-tel, akkor a szám is osztható 7-tel; ha pedig a számjegyek összege nem osztható, akkor a szám sem osztható 7-tel.

2. Az algebrai megoldás többet igazol a bizonyítandó tételnél: nemcsak háromjegyű, hanem bármely $100a + 11b$ alakú szám ahol a és b tetszőleges egész számok – akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha $a + 2b$ osztható. Pl. $100 \cdot 243 + 11 \cdot 22 = 24542$ szám esetén $243 + 2 \cdot 22 = 287$ osztható 7-tel, tehát a szám is osztható 7-tel. Mivel azonban általában nem könnyű egy egész számról azt megállapítani, hogy írható-e egész a , b -vel $100a + 11b$ alakban, ahol $b \geq 10$, azért ez a tétel oszthatósági vizsgálatok könnyítésére csak két egyező jegyre végződő számoknál lehet hasznos.

¹ Ez pl. abból következik, hogy $4 \cdot 2(a + 2b) = 7(a + 2b) + (a + 2b)$ is, és így $a + 2b$ is osztható 7-tel.