

Első feladat. Egy társasutazás bármely négy résztvevője között van olyan, aki a másik három mindegyikével már máskor is találkozott. *Bebizonyítandó, hogy bármely négy résztvevő között van olyan, aki már minden útitársával találkozott.*

Megjegyzés. A feladat csak arra az esetre vonatkozik, amikor a társasutazásnak van legalább négy résztvevője. Ha ez nem áll fenn, akkor a feladat feltevése és állítása egyaránt semmitmondó.

I. megoldás. Legyen A és B két olyan résztvevő, akik korábban még nem találkoztak. Feltehetjük, hogy van két ilyen, hiszen különben bármely résztvevő megfelelne a feladat kívánalmának. Azt is feltehetjük, hogy van az AB pártól különböző utaspár, akik szintén először találkoznak, mert különben minden A -tól és B -től különböző résztvevő megfelelne, és bármely négy résztvevő között van ilyen (sőt legalább kettő).

Az AB -től különböző, ugyancsak először találkozó utaspárban szerepelnie kell A -nak vagy B -nek, mert ha ez a CD utaspár A -tól és B -től különböző útitársakból állna, akkor A, B, C, D közül egyik sem találkozott volna korábban a másik három mindegyikével, és ez ellentmond a feladat feltevésének. Legyen tehát AC ez az AB -től különböző, ugyancsak először találkozó utaspár, hiszen minden lehetséges eset ezzé az esetté betűzhető át.

Azt vizsgáljuk most, hogy mely AB -től és AC -től különböző utaspár állhat olyanokból, akik máskor még nem találkoztak. Az előző bekezdés szerint A -nak vagy B -nek az ilyen utaspárban is szerepelnie kell, de ugyanolyan indokolással szerepelnie kell benne A és C valamelyikének is. Eszerint ez a további először találkozó utaspár csak BC vagy pedig AD lehet, ahol D egy még nem említett résztvevő.

Az utóbbi eset azonban lehetetlen, mert akkor az A, B, C, D résztvevőkre nem teljesülne a feladat feltevése. Eszerint az AB, AC párokon kívül csak BC állhat egymással először találkozó útitársakból, tehát minden A -tól, B -től és C -től különböző résztvevőnek találkoznia kellett már minden útitársával. Minthogy bármely négy résztvevő között van ilyen, a feladat állítása helyes.

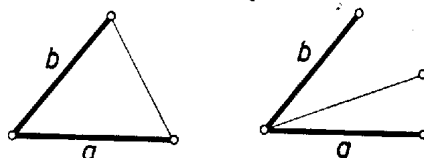
Megjegyzés. Egyszerűbbé válik feladatunk megoldása, ha ábrázoljuk a vizsgált viszonyokat, és megfelelő elnevezéseket vezetünk be.

Ábrázoljuk a társasutazás résztvevőit egy-egy ponttal, és kössünk össze kettőt-kettőt közülük egy vonaldarabbal akkor, ha a két pontnak megfelelő útitárs korábban még nem találkozott. Az összekötő vonalakat úgy választjuk meg, hogy ne haladjanak át más résztvevőt ábrázoló ponton. Ilyen módon egy *gráfhoz* jutottunk, amelynek *szögpontjai* az útitársaknak, *élei* pedig az először találkozó utaspároknak felelnek meg. Ha a gráf élei esetleg metszik vagy érintik egymást, közös pontjukat nem számítjuk a gráf szögpontjai közé. Az általunk bevezetett gráfnak véges sok szögpontja van, minden éle két-két egymástól különböző szögpontot köt össze, és ugyanazt a szögpontpárt csak legfeljebb egy él köti össze. Ha a következőkben gráfról lesz szó, mindig csak ilyen gráfra gondolunk.

Ha feladatunkat a most bevezetett gráfra szövegezzük meg, a feladat a következő alakot ölti: *Egy gráfnak nincs négy olyan szögpontja, amelyeknek mindegyikéből kiindul él a másik három szögpont valamelyikéhez. Bebizonyítandó, hogy a gráf bármely négy szögpontja között van olyan, amelyből nem indul ki él.* Semmitmondó esetek kizárása kedvéért hozzátehetjük volna, hogy a gráfnak legalább négy szögpontja van.

Az így szövegezett feladat megoldása rövidebb és áttekinthetőbb. Ezt a közölt megoldás átszövegezésén mutatjuk be:

Feltehetjük, hogy a gráfnak van legalább két éle, a és b , mert különben legfeljebb két szögpont kivételével egyikből sem indul ki él, és bármely négy szögpont között van ilyen. Az a, b élek egyik végpontja közös, mert különben négy végpontjukra nem teljesülne a feladat feltevése. Ebből az is következik, hogy az a, b éleken kívül csak olyan él szerepelhet, amelynek van közös pontja a -val és b -vel is. Az ilyen él tehát (1. ábra) vagy a és b szabad végpontját köti össze, vagy pedig közös végpontjukból indul ki. Az utóbbi eset lehetetlen, mert akkor a három él négy végpontja ellentmondana a feladat feltevésének. Ezek szerint csak az a, b élek három végpontjából indul ki él, bármely négy szögpont között van tehát olyan, amelynek nincs meg ez a tulajdonsága.



1. ábra

II. megoldás. Feltesszük, hogy van legalább négy olyan résztvevő, aki valamely útitársával a társasutazáson találkozik először, hogy tehát a feladat állítása nem teljesül, és bebizonyítjuk, hogy akkor a feladat feltevése sem teljesülhet, hogy tehát van négy olyan résztvevő, akik közül egyik sem találkozott korábban a másik három mindegyikével. Ez bizonyítja majd, hogy ha a feladat feltevése teljesül, állításának is teljesülnie kell.

Ismét abból indulunk ki, hogy A és B először találkozik egymással. Ha két tőlük különböző résztvevő korábban még nem találkozott, akkor máris találtunk az állításunkat bizonyító négy résztvevőt.

Legyen C és D két olyan további résztvevő, akik nem mindenkiel találkoztak korábban. Mostani feltevésünk szerint biztosan van két ilyen. Az előző bekezdés szerint csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor C is és D is csak

már megbeszített résztvevővel találkozik először. Ekkor azonban A , B , C és D négy olyan útitárs, akiknek egyike sem találkozott korábban a másik három mindegyikével, akik tehát állításunk helyességét bizonyítják.

Megjegyzések. 1. Második megoldásunk a gráfokra átültetett feladat szövegének további átfogalmazását teszi indokolttá. Ha a gráfból elhagyjuk azokat szögpontokat, amelyekből nem indul ki él, akkor a feladat következő megfogalmazásához jutunk: *Egy gráf minden szögpontjából kiindul él, de nincs négy olyan szögpontja, amelyeknek mindegyikéből kiindul él a másik három valamelyikébe. Bebizonyítandó, hogy a gráfnak négyenél kevesebb szögpontja van.*

Ha ezt a feladatot ugyanúgy átszövegezzük, ahogyan az eredeti feladattal második megoldásunk elején tettük, akkor feladatunk következő újabb szövegéhez jutunk: *Egy gráfnak legalább négy szögpontja van, és minden szögpontjából kiindul él. Bebizonyítandó, hogy van a gráfnak négy olyan szögpontja, amelyeknek mindegyikéből kiindul él a másik három valamelyikéhez.* Az olvasóra hagyjuk, hogy második megoldásunkat e feladat megoldásává írja át.

2. Második megoldásunk mintájára bebizonyítjuk, hogy utolsó állításunk akkor is helyes, ha benne 4 helyett tetszőleges páros $2k$ természetes szám áll. Az általánosított feladat tehát a következőképpen szól: *Egy gráfnak legalább $2k$ szögpontja van, és minden szögpontjából kiindul él. Bebizonyítandó, hogy van a gráfnak $2k$ olyan szögpontja, amelyeknek mindegyikéből kiindul él a többi $2k - 1$ szögpont valamelyikéhez.*

Válasszunk ki gráfunkból lehetőleg sok független élt, azaz olyanokat, amelyeknek végpontjai mind különbözők. Ha van k független él, akkor ezek végpontjai máris bizonyítják állításunk helyességét. Ha csak $j < k$ független él választhatunk ki, ha tehát ezektől független $(j + 1)$ -edik él már nincs, akkor $2j$ végpontjukról tudjuk, hogy minden további szögpontból kiinduló él ennek a $2j$ végpontnak valamelyikébe fut. Ha tehát ehhez a $2j$ végponthoz bármely további $2k - 2j$ szögpontot csatolunk, az állításunkat bizonyító $2k$ szögponthoz jutunk.

Megtehetnők, hogy a most bizonyított tényt annyiféleképpen fogalmazzuk át, ahányféleképpen ezt eredeti feladatunkkal megtettük. Megelégszünk azzal, hogy csak az eredeti megszővegezésbe öltöztetett eredményünket mondjuk ki: *Ha egy társasutazás bármely $2k$ résztvevője között van olyan, aki a többi $2k - 1$ mindegyikével már máskor is találkozott, akkor bármely $2k$ résztvevő között van olyan, aki már minden útitársával találkozott.* Semmitmondó eseteket zárunk ki, ha megköveteljük, hogy a társasutazásnak legalább $2k$ résztvevője van. Megemlítjük, hogy a $k = 1$ esetben az állítás nyilvánvalóan helyes, a $k = 2$ eset pedig eredeti feladatunk állítása.

3. Felmerül a kérdés, hogy helyes marad-e utolsó eredményünk, ha benne $2k$ helyett egy páratlan $2k + 1$ szám áll. Bebizonyítjuk, hogy így már hamis állításhoz jutunk, hogy tehát ez a módosítás az eddig említett különféle megszővegezések egyikénél sem megengedett. A $2k + 1 = 1$ esetet figyelmen kívül hagyjuk, mert ebben az esetben a feladat értelmét veszti.

Bizonyítás céljából elég egy kellően sok független élből álló gráfot tekintenünk. Ennek van legalább $2k + 1$ szögpontja, és minden szögpontjából kiinduló él. Nincs viszont $2k + 1$ olyan szögpontja, amelyek mindegyikéből kiindul él a többi $2k$ szögpont valamelyikébe. Akárhogyan szemelünk ki ugyanis $2k + 1$ szögpontot, az ezeket összekötő élek végpontjainak száma természetesen csak páros lehet, s így ezek nem meríthetik ki a $2k + 1$ szögpontot.

Második feladat. Az $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots$ természetes számok végtelen sorozatában

$$a_k \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$$

minden $k > 1$ értékre teljesül. *Bebizonyítandó, hogy minden természetes szám felírható ebből a sorozatból kiválasztott számok összegeként (vagy pedig előfordul a sorozatban).*

Megjegyzés. A feladat zárójeles toldaléka felesleges akkor, ha egytagú összeget is lehetségesnek tartunk, ha tehát bármely számot a saját összegének is mondunk. Ez a felfogás megkönnyíti a szövegezést, a megoldásainkban szereplő összegek is így értendők.

I. megoldás. A feladat állításán túlmenően azt bizonyítjuk, hogy ha $0 < n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k$, akkor az n természetes szám felírható a véges $a_1, a_2, \dots, a_k$ sorozatból kiválasztott számok összegeként. Ezt az állítást k -ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be.

Ha $k = 1$, akkor állításunk $a_1 = 1$ miatt helyes, hiszen ebben az esetben csak $n = 1$ lehetséges. Legyen tehát $k > 1$, és tegyük fel, hogy állításunk helyes, ha benne k helyén $k - 1$ áll.

Ha $0 < n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$, akkor indukciós feltevésünk szerint n felírható a kívánt alakban, ti. már $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ is elegendő az összegül n -et adó számok kiválasztásához. Legyen tehát

$$1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} \leq n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Minthogy a baloldali összeg a feladat feltevése szerint legalább a_k , egyenlőtlenségeinkből

$$0 \leq n - a_k \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$$

következik. Eszerint $n - a_k$ vagy 0, vagy pedig az indukciós feltevés szerint felírható az $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ sorozatból kiválasztott számok összegeként. Így tehát vagy $n = a_k$, vagy pedig a_k -t a kiválasztott számokhoz csatolva összegül n adódik.

II. megoldás. Ismét azt bizonyítjuk, hogy ha $0 < n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k$, akkor n felírható az $a_1, a_2, \dots, a_k$ sorozatból kiválasztott számok összegeként, de most n -re vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk.

Ha $n = 1$, akkor $a_1 = 1$ miatt helyes az állítás, akármekkora is k értéke. Legyen tehát $n > 1$, és tegyük fel, hogy állításunk helyes, ha benne n helyén nála kisebb m szám áll.

A rögzített $n > 1$ mellett olyan k értékeket kell tekintenünk, amelyekre $n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k$ teljesül. Elég, ha közülük csak a legkisebbel foglalkozunk, tehát azzal a k értékkel, amelyre

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} < n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k,$$

hiszen k növelésekor az összegül n -et adó számok kiválasztásához rendelkezésre álló választék csak növekszik.

Egyenlőtlenségeinkből az $m = a_1 + a_2 + \dots + a_k - n$ értékre $0 \leq m < a_k$ adódik. Így tehát a feladat feltevését is alkalmazva

$$0 \leq m \leq a_k - 1 \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} < n.$$

Ha tehát az érdektelen $m = 0$ (azaz $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$) esetet figyelmen kívül hagyjuk, akkor

$$0 < m < n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Indukciós feltevésünk szerint ez éppen azt biztosítja, hogy m előállítható az $a_1, a_2, \dots, a_k$ sorozatból kiválasztott számok összegeként. Ha tehát ezeket ebből a sorozatból elhagyjuk, akkor a megmaradónak n az összege.

Megjegyzések. 1. Felvethető a kérdés, hogy feladatunk feltevésének teljesülnie kell-e, ha állítása teljesül. Ez nincs így. Ha pl. minden $i \neq 2$ esetben $a_i = 1$, viszont $a_2 = 3$, akkor a feltevés a $k = 2$ esetben nem teljesül: $3 > 1 + 1$, viszont bármely természetes szám mégis előállítható az $1, 3, 1, 1, 1, \dots$ sorozatból kiválasztott számok összegeként.

Elmondhatjuk, hogy negatív tapasztalatunk nem meglepetés, mert a végtelen sorozat elemeinek permutálása a természetes számok előállíthatóságának mit sem árt, viszont megszüntetheti a feladat feltevésének teljesülését. Előző példánk is úgy keletkezik, hogy a feltevést is kielégítő $1, 1, 3, 1, 1, 1, \dots$ sorozat két elemét felcseréljük.

2. Feladatunk feltételének szükségességét mégiscsak bebizonyítjuk, de a következő formában: *Ha minden természetes szám felírható egy természetes számokból alakuló $c_1, c_2, c_3, \dots$ végtelen sorozatból kiválasztott számok összegeként, akkor ez a sorozat átrendezhető $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots$ alakba úgy, hogy*

$$a_k \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$$

minden $k > 1$ értékre teljesüljön.

Abból indulunk ki, hogy $a_1 = 1$ lehetséges választás, hiszen 1-nek szerepelnie kell a $c_1, c_2, c_3, \dots$ sorozatban, mert 1 is előállítható általa. A további a_i értékek megválasztását a következőképpen szabályozzuk:

Minthogy $N_2 = 2$ előállítható, a $c_1, c_2, c_3, \dots$ sorozatban a_1 elhagyása után is szerepelnie kell legalább egy N_2 -nél nem nagyobb elemnek (ti. 1-nek vagy 2-nek). Azt választjuk közülük a_2 -nek, amelyiknek a $c_1, c_2, c_3, \dots$ sorozatban a legkisebb az indexe.

a_2 megválasztása után van egy legkisebb N_3 természetes szám (ti. 3 vagy 4), amely nem írható fel a véges a_1, a_2 sorozatból kiválasztott számok összegeként. Szerepelnie kell ezért a $c_1, c_2, c_3, \dots$ sorozatban a_1 és a_2 elhagyása után is legalább egy N_3 -nál nem nagyobb számnak. Azt választjuk közülük a_3 -nak, amelyiknek az indexe a $c_1, c_2, c_3, \dots$ sorozatban a legkisebb.

Így folytatjuk ezt az eljárást. Ha már megválasztottuk az $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ sorozatelemeket, akkor van egy legkisebb N_k természetes szám, amely nem írható fel a véges $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ sorozatból kiválasztott számok összegeként. Szerepelnie kell ezért a $c_1, c_2, c_3, \dots$ sorozatban a már kiválasztott elemek elhagyása után legalább egy N_k -nál nem nagyobb számnak. Ezek közül azt választjuk a_k -nak, amelyiknek az indexe a $c_1, c_2, c_3, \dots$ sorozatban a legkisebb.

A következő lépésben fellépő N_{k+1} nagyobb N_k -nál, hiszen N_k maga már bizonyosan felírható az $a_1, a_2, \dots, a_k$ sorozatból kiválasztott számok összegeként vagy azért, mert $a_k = N_k$, vagy pedig azért, mert a_k mellé az $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ sorozatból $N_k - a_k$ összeget adó számokat választhatunk ki, hiszen N_k volt a legkisebb így elő nem állítható szám.

Ha tehát eljárásunkat minden határon túl folytatjuk, akkor $N_2 < N_3 < N_4 < \dots$ miatt a $c_1, c_2, c_3, \dots$ sorozat bármely c_i eleme előbb-utóbb kiválasztásra kerül, mert ha pl. a k -adik lépésben már $N_k \geq c_i$, akkor ettől a lépéstől kezdve csak c_i vagy nála kisebb indexű elem kerülhet kiválasztásra, márpedig a véges sok $c_1, c_2, \dots, c_{i-1}$ elem előbb-utóbb elfogy. Ezek szerint az általunk képezett $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatban a $c_1, c_2, c_3, \dots$ sorozat minden eleme előfordul, tehát az utóbbi sorozatot valóban átrendeztük.

N_k definíciójából következik, hogy értéke legfeljebb $1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$ hiszen ez a szám biztosan nem állítható elő az $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ sorozatból kiválasztott számok összegeként. Minthogy pedig $a_k \leq N_k$, bebizonyítottuk, hogy feladatunk feltevésének teljesülnie kell az átrendezéssel származtatott $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatra.

3. Ha az $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ feltételnek eleget tevő monoton sorozatokra szorítkozunk, akkor kizártuk azt, hogy a sorozat elemeit permutálhassuk, hogy tehát a feladat feltevésének teljesülése ettől a permutálástól függjön. Az ilyen monoton sorozat esetében a feladat feltevésének (minden permutálás nélkül) teljesülnie kell, ha az állítása teljesül.

Ha ugyanis $a_k > 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} = n$, akkor n nem írható fel az $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatból kiválasztott számok összegeként, hiszen ebben a végtelen sorozatban csak az $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ elemek nem nagyobbak n -nél, és mindezeknek az összege még mindig kisebb nála.

4. Utolsóként azt a kérdést vetjük fel, hogy hogyan kell a feladat feltevését kielégítő sorozatot megválasztani, ha azt akarjuk, hogy elemei a lehető legnagyobbak legyenek. Megmutatjuk, hogy $1, 2, 4, 8, \dots$ ez az optimális sorozat.

Akárhogyan választjuk meg ugyanis a feltevést kielégítő sorozatot, ebben minden $k > 1$ értékre teljesül az

$$a_k \leq 2^{k-1}$$

egyenlőtlenség. Ezt k -ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be. A $k = 2$ esetben helyes az állítás, mert a feltevés szerint $a_2 \leq 1 + a_1 = 2^1$. Legyen tehát $k > 2$, és tegyük fel, hogy az állítás teljesül, ha benne k helyén nála kisebb szám áll. Ekkor

$$a_k \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} \leq 1 + 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-2} = 2^{k-1},$$

ami állításunk helyességét bizonyítja.

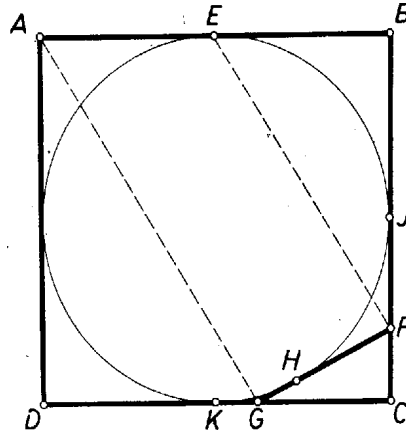
Az utolsó egyenlőség, éppen feladatunk állítására hivatkozva, azt a jól ismert tényt bizonyítja, hogy minden természetes szám felírható 2 különböző hatványainak összegeként. Beláttuk tehát, hogy a vizsgált tulajdonságú sorozatok közül 2 hatványsorozatának az elemei a legnagyobbak.

Harmadik feladat. Az $ABCD$ négyzet AB oldalát az E pont felezi, a BC és a CD oldalon pedig úgy helyezkednek el az F , G pontok, hogy az AG , EF egyenesek párhuzamosak. Bebizonyítandó, hogy az FG szakasz érinti a négyzetbe írt kört.

I. megoldás. Ha a CFG_Δ -höz írt, az FG oldalt kívülről érintő kör ezt az oldalt H -ban, a CF , CG oldalak meghosszabbítását pedig a J , K pontokban érinti (2. ábra), akkor ez utóbbiakra

$$(1) \quad CJ = CK \quad \text{és} \quad FJ + GK = FG,$$

hiszen az egy pontból ugyanahhoz a körhöz vont érintőszakaszok egyenlők, s ezért $FJ = FH$ és $GK = GH$.



2. ábra

Azt állítjuk, hogy (1) a CF , CG oldalak meghosszabbításain elhelyezkedő pontpárok közül csak a szóban forgó érintési pontokra teljesül. Ha ugyanis a J , K pontokat elmozgatva növeljük vagy csökkentjük a $CJ = CK$ távolságot, akkor $FJ + GK$ is növekszik vagy csökken, tehát már nem lehet FG -vel egyenlő.

Ezek szerint elég azt bizonyítanunk, hogy a négyzet BC , CD oldalainak J , K felezőpontjaira (1) teljesül, mert ebből következik, hogy a J , K pontokban érintő, tehát a négyzetbe írt kör érinti az FG oldalt is. Felhasználtuk itt azt, hogy J és K a CF , CG szakaszok meghosszabbításán van. Ez abból következik, hogy $AC \parallel EJ$ és $AK \parallel EC$, s ezért a DGC sorrendből a CFJ sorrend, a BFC sorrendből pedig a CGK sorrend következik.

Legyen a négyzet oldala 2, azaz válasszuk hosszegységül az oldalhossz felét. Ha tehát $DG = x$, akkor

$$CG = 2 - x, \quad GK = x - 1.$$

Az ADG , FBE háromszögek hasonlóak, mert oldalai párhuzamosak. Ezért $2 : x = FB : 1$, tehát $FB = 2/x$, és így

$$CF = 2 - \frac{2}{x}, \quad FJ = \frac{2}{x} - 1.$$

Minthogy $(FJ + GK)^2 = FG^2$ bizonyítására van szükségünk, Pythagoras tétele szerint már csak

$$\left[\left(\frac{2}{x} - 1 \right) + (x - 1) \right]^2 = \left(2 - \frac{2}{x} \right)^2 + (2 - x)^2$$

helyességét kell belátnunk. Ez valóban helyes, hiszen a bal oldal

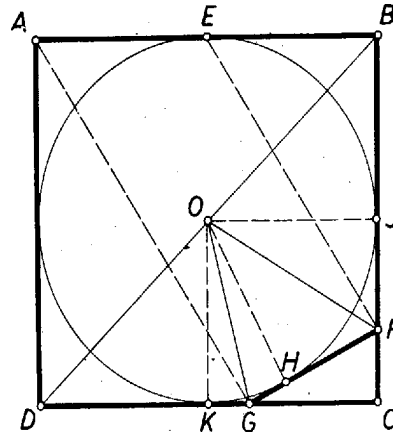
$$\left(\frac{2}{x} - 2 + x \right)^2 = \left(\frac{2}{x} - 2 \right)^2 + 2x \left(\frac{2}{x} - 2 \right) + x^2$$

alakban írható, s itt az utolsó két tag együttes értéke $4 - 4x + x^2 = (2 - x)^2$.

II. megoldás. Ha a derékszögű CFG_{Δ} -höz írt, az FG átfogót kívülről érintő kör középpontja O (3. ábra), akkor

$$(2) \quad FOG \sphericalangle = 45^\circ,$$

hiszen OF és OG felezi az egymást derékszöggé kiegészítő JOH , HOK szögeket, ahol H , J , K az előző megoldásban bevezetett pontok.



3. ábra

Azt állítjuk, hogy (2) az FCG derékszög szögfelezőjén elhelyezkedő pontok közül csak a szóban forgó középpontra teljesül. Ha ugyanis O a szögfelezőn elmozdulva közeledik a szögfelezőt metsző FG szakaszhoz, vagy távolodik tőle, akkor az FOG látószög növekszik, illetőleg csökken.

Ezek szerint elég azt bizonyítanunk, hogy (2) a négyzet O középpontjára teljesül, tehát azt, hogy

$$(3) \quad FOG \sphericalangle = GDO \sphericalangle.$$

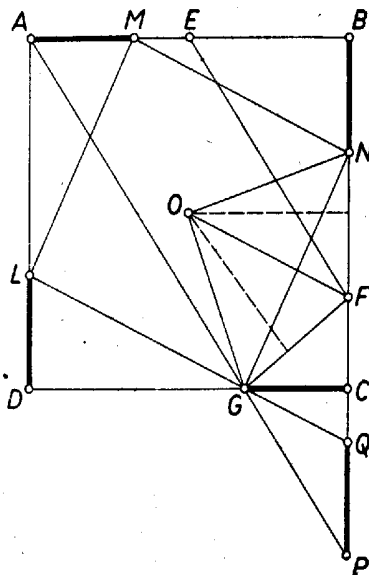
E szögek közül az elsőt a GOD , FOB szögek, a másodikat a GOD , OGD szögek 180° -ra egészítik ki. Ezért (3) igazolásához csak

$$(4) \quad FOB \sphericalangle = OGD \sphericalangle$$

bizonyítására van szükség.

Ennek bizonyításához abból indulunk ki, hogy az ADG , FBE háromszögek hasonlósága miatt $DG : 2a = a : BF$, ahol $2a$ a négyzet oldalhossza. Eszerint $DG \cdot BF = 2a^2$, vagyis $DG : DO = BO : BF$, hiszen $DO = BO = a\sqrt{2}$. Ebből az aránypárból következik azonban, hogy $GDO_{\Delta} \sim OBF_{\Delta}$, hiszen ezekben a háromszögekben $GDO \sphericalangle = OBF \sphericalangle = 45^\circ$. A hasonlóság miatt a két háromszög megfelelő szögei egyenlők, tehát (4) valóban teljesül.

III. megoldás. Mérjük fel négyzetünk négy oldalára a $CG = DL = AM = BN$ szakaszokat (4. ábra). A forgásszimmetria miatt $GLMN$ is négyzet. Messék az AG , LG egyenesek a BC egyenest a P , Q pontokban. Minthogy az $ALDG$ pontnégyes a szerkesztés révén hasonló a $PQCG$ pontnégyeshez, és az előbbiben $AL = DG$, azért a másik pontnégyes megfelelő pontjaira $PQ = CG$. Így tehát $PQ = BN$.

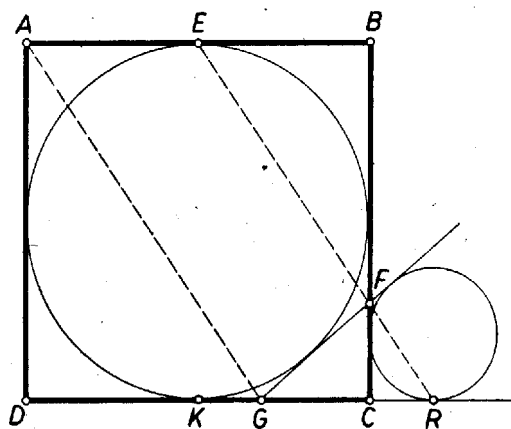


4. ábra

Minthogy EF az APB_{Δ} középvonala, F felezi a PB szakaszt, tehát az ezen belül szimmetrikusan elhelyezkedő QN szakaszt is. Eszerint F a derékszögű QNG_{Δ} átfogójának felezőpontja, egyenlő távolságra van tehát e háromszög csúcsaitól, azaz $FG = FN$. Ebből következik, hogy $OFG_{\Delta} \simeq OFN_{\Delta}$, hiszen a forgásszimmetria miatt $OG = ON$, tehát a két háromszög oldalai páronként egyenlők. A bizonyított egybevágóságból következik, hogy az O pont az FG , FN egyenesektől egyenlő távolságra van, hogy tehát a négyzetbe írt kör az FG szakaszt is érinti.

IV. megoldás. Ha az F pontot ismerjük, akkor az $AG \parallel EF$ előírás egyértelműen meghatározza a G pontot. Ha F -ből a négyzetbe írt körhöz második érintőt vonunk, akkor ez a CD oldalból F által ugyancsak egyértelműen meghatározott pontot metsz ki. Feladatunk azt állítja, hogy ez a két hozzárendelés azonos. Ezt most úgy bizonyítjuk, hogy a négyzetbe írt kört érintő FG szakaszból indulunk ki, és megmutatjuk, hogy $AG \parallel EF$.

Tekintsük a négyzetbe írt kör mellett a CFG_{Δ} -hoz írt, a CF oldalt kívülről érintő kört (5. ábra). Érintse ez a CD egyenest az R pontban. F a két kör belső hasonlósági pontja, hiszen közös belső érintőik metszéspontja. Ebből következik, hogy a két kört ellentétes oldalról érintő és párhuzamos AB , DC egyenesek E , R érintési pontjai a hasonlóság által egymáshoz rendelt pontok, hogy tehát az E , F , R pontok egy egyenesen vannak.



5. ábra

Azt kell bizonyítanunk, hogy AG párhuzamos EF -fel, azaz ER -rel; tehát azt, hogy $AERG$ paralelogramma. Ehhez $GR = AE$ bizonyítására van szükség. Ez viszont következik abból, hogy egyrészt $AE = KC$, ahol K a CD oldal felezőpontja, másrészt pedig $GR = KC$ is teljesül, hiszen ismeretes, hogy egy háromszög valamely oldalának két meghosszabbítását a háromszöghöz írt körök az oldalhoz viszonyítva szimmetrikusan elhelyezkedő pontokban érintik.

Megjegyzések. 1. Harmadik feladatunk állítása akkor is helyes, ha benne nem a BC , CD oldalakon, hanem a BC , CD oldalegyeneseken elhelyezkedő pontokról szólnunk, és nem az FG szakaszból, hanem az FG egyenesről állítjuk, hogy érinti a négyzetbe írt kört. Harmadik megoldásunk közvetlenül alkalmas ennek bizonyítására is, a többinél pedig csekély módosításra van ehhez szükség. Az olvasóra hagyjuk, hogy ezeket a módosításokat megkeresse.

2. Akkor is helyes marad feladatunk állítása, ha nem négyzetről, hanem rombuszról szólnunk, és E nem az AB oldal felezőpontját, hanem a rombuszba írt kör és az AB oldal érintési pontját jelenti. Negyedik megoldásunk közvetlenül alkalmazható ennek a bizonyítására is.

A rombuszra kimondott állítás szintén helyes marad, ha a BC , CD , FG szakaszok szerepét e szakaszok egyenesei veszik át. A negyedik megoldás az előbb már említett módosítás után ezt is bizonyítja.

3. Pusztán megemlíthetjük, hogy harmadik feladatunk állítását nagyon gyorsan bizonyíthatja, aki ismeri a kúpszeletek érintőiről szóló Brianchon-tételt, s hogy ez a rövid bizonyítás az előbb említett általánosítások mindegyikét közvetlenül bizonyítja. A részletekbe itt nem bocsátkozhatunk, mert ehhez a középiskolai anyagot messze meghaladó ismeretekre volna szükség.