

Sokan nem is sejtik, hogy a zene milyen szoros összefüggésben van a matematikával. Pedig a zene mai magas fokára való felemelkedését nem csupán a zeneszerzők alkotó tehetségének, hanem részben a matematikusok munkásságának is köszönheti. Erről szól ez a cikk, amelyet bizonyos időközökben még több is fog követni, hogy lapunk olvasóinak valamelyes fogalmuk legyen azokról a küzdelmekről és erőfeszítésekről, amelyek mai, most már előreláthatóan végleges hangrendszerünk kialakulásához vezettek.

A zene olyan régi, mint maga az emberiség. Már az ősember felismerte a természet adta hangok sokféleségében a zenei hangok és a zörejek különbségét, s igyekezett, az előbbieket részint beszédszerve, részint mesterségesen készített eszközök (síp, lant) segítségével maga is létrehozni. Észrevette a zenei hangoknak magassági különbözőségét, s ezeknek a különböző magasságú hangoknak egymás után rendezésével megalkotta az első primitív dallamokat. Az összhangokat még nem használta, dallamai egyszerűlamúak voltak, s terjedelmük is csak néhány hangra szorítkozott, de már ez is kétségtelenül zene volt, egyszerűlamú, homofón zene.

A hangmagasságot tulajdonképpen folytonosan növelhetjük, s így a magasságra nézve különböző hangok száma végtelen nagy, a zenében azonban csak ugrásszerűen változó hangokat használhatunk, mert a folytonosan változó magasságú hang fülünket bántja. (Gondoljunk csak a légóltalmi riasztásnál, vagy a mentőautóknál használt szirénák ijesztő hangjára.) A zenében felmerülő első probléma tehát az volt, hogy a különböző magasságú hangok végtelen sokaságából kiválasszuk azokat, amelyekből dallamokat, melódiákat lehet alkotni. Ehhez a kiindulópontot az ember füle, hallása szolgáltatta.

Az ember már nagyon korán észrevette, hogy egy kezdőhangból kiindulva, a hangmagasságot fokozatosan növelve egyszer csak olyan hanghoz érkezik el, amelyet füle a kezdőhanghoz rendkívül hasonlóknak, szinte a kezdőhang magasabb fekvésű ismétlődésének érez. Ezt a hangot a kezdőhang *oktávjának* nevezzük. (Az elnevezés okát később fogjuk látni.) Ezt a hangot mindig megtalálhatjuk, bármilyen hangból indulunk is ki, vagyis a hangok növekvő magasságú sora oktávokban ismétlődik. Az ismétlődés-érzet nem tanulás vagy nevelés eredménye, ezt a természet maga oltotta belénk, hiszen minden népnél megtalálható, még a kultúra legelső fokán álló őskori népeknél is. Midőn ezek vallásos vagy társadalmi szertartásaik alkalmával ősi dalaikat közösen énekeltek, akkor a nők természetesen egy oktávval magasabban intonálták ugyanazon dallamot, mint a férfiak, anélkül, hogy erről határozott tudatuk lett volna. Még ma is megtörténik, hogy nem nagy zenei képzettséggel rendelkező emberek a zongorán leütött hangot egy oktávval magasabban vagy mélyebben énekelik s tévedésüket nem veszik észre.

A hangoknak ez az oktávokban való ismétlődése már most lehetővé teszi számunkra, hogy a zenében használandó hangokat csak egyetlen ilyen oktáv keretén belül válogassuk ki. Ez a kiválogatás a különböző népeknél, de a különböző korokban is más és más irányelvek szerint történt, s hol tisztán a hallásra, hol pedig matematikai spekulációkra támaszkodott. Mint a művészetek és tudományok legtöbb ágában, itt is az ókori görögök a későbbi nemzedékekre maradandó hatást gyakoroltak. Az ő hangrendszerük volt az alapja a középkori skálák kialakulásának, s az ezekből leszármaztatható mai hangrendszerünknek is.

Bármennyire homofón jellegű volt is az akkori zene, mégis észrevették, hogy két hangot egyszerre szólaltatva meg, fülünk ezt néha kellemesnek, máskor viszont kellemetlennek találja. *Pythagoras*, az ókor híres filozófusa és matematikusa, aki minden dolog lényegét a számokban látta, ezt az érzést is számviszonyokra igyekezett visszavezetni. Vizsgálataihoz a *monochordot* használta (monos = egyedüli, chorda = húr), amely egy hosszú fadobozra feszített húrból állott. Ezt a húrt egyik végén csavar segítségével különböző erővel lehetett kifeszíteni, hosszúságát pedig a húr alatt csúsztható lábbal lehetett változtatni. A megpendített húr a feszítéstől és a húr hosszúságától függően más és más hangot adott. Ha ezeket a kísérleteket mi is el akarjuk végezni, az előbbi húr mellé még egy másodikat is feszítenünk kell, s a kísérletek kezdetével ezt a két húrt pontosan összehangoljuk. Így minden hangot az eredetivel könnyen összehasonlíthatunk.

Ezek a kísérletek azt mutatják, hogy a húr hangjának oktávját akkor kapjuk meg, ha a húr hosszúságát változatlan feszítés mellett felére rövidítjük. Ha a feszítőerő változtatásával a húr alaphangját megváltoztatjuk, akkor is mindig ugyanezt találjuk. Pythagoras ezért az oktávnyi hangtávolságot (*hangközt*, intervallumot) ezen két hosszúság arányával fejezve ki, vagyis az oktáv mértékéül az: $1/2 : 1$, azaz $1 : 2$ arányt vette fel.

Az eredeti húr hosszúságát ezután $2/3$ -részére rövidítve egy újabb, az oktávnál alacsonyabb hangot kapunk, amely az alaphanggal együtt majdnem olyan kellemesen hat, mint az oktávok együtthangzása, de itt már nem érezzük a két hangnak azt a szinte teljes összeolvadását, amelyet az oktávoknál vehettünk észre, itt már határozottan halljuk, hogy két hang szól egyszerre. A most nyert hang az alaphanggal az előbbieket szerint olyan hangközt alkot, amelynek mértéke $2/3 : 1$, vagyis $2 : 3$.

Az alaphanggal kellemesen együtt hangzó további hangra akkor jutunk, ha a húr hosszúságát $3/4$ részére csökkentjük. Ennek a hangköznek mértéke tehát $3/4 : 1$, azaz $3 : 4$.

A kellemes együtthangzást *konszonanciának*, a nem kellemest *diszszonanciának* nevezzük s ennek megfelelően a hangközöket is konszonáns, vagy diszszonáns hangközöknek mondjuk. Mint látjuk, Pythagorasnak sikerült a hangközt, amely végeredményben tisztán fiziológiai érzet, mérhető mennyiséggé alakítani, s két egész szám arányával mérnie, egyúttal pedig felfedeznie, hogy a hangközt annál konszonánsabbnak érezzük, minél kisebb egész számok arányával fejezhető ki. Ha az $1 : 1$ aránytól eltekintünk, mert hiszen ez azonos magasságú két hang intervallumát fejezi ki, akkor legkonszonánsabb hangköz az $1 : 2$ aránnyal kifejezhető oktáv, azután következik a $2 : 3$, majd a $3 : 4$ arányoknak megfelelő két hangköz. Ezek az ún. tökéletes konszonanciák. A $3 : 5$, $4 : 5$, $5 : 6$ még mindig konszonáns hangközöket jelentenek, ha nem is oly tökéleteseket, mint az előbbieket, a 6-on túli egész számokkal kifejezhetőek azonban már

határozottan disszonánsok, különösen azok, amelyekben az 5-nél nagyobb prímszámok fordulnak elő.

Csak jónéhány évszázaddal később állapították meg, bár már előbb is sejtették, hogy a zenei hang keletkezéséhez valamely rugalmas test periodikus rezgése szükséges. Ezek a rezgések a hangforrástól a levegőn keresztül longitudinális hullámok alakjában fülünkbe jutnak, s a dobhártyát rezgésbe hozzák, amit azután hallószervünk mint hangot érzékel. Mint fizikai tanulmányainkból tudjuk, a hullámhosszúság és a *rezgés frekvenciája* a

$$\lambda = \frac{c}{n}$$

egyenlőség szerint függnek össze, ahol λ a hullámhossz n a frekvencia, c pedig a hangnak a levegőben, vagy más közegben való terjedési sebessége. (15 °C hőmérsékletű levegőben 340 m sec⁻¹). A fülben keletkező hang magassága a tapasztalat szerint a frekvenciától függ, minél nagyobb a frekvencia, annál magasabbnak érezzük a hangot. A hang abszolút magasságát ezért a fizikusok a rezgések frekvenciájával mérik.

A 18. század elején *Taylor* a húr által keltett hang rezgésszámának kiszámítására képletet is talált:

$$n = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{q \cdot d}},$$

ahol l a húr hosszúsága, q keresztmetszetének területe, d anyagának sűrűsége, P a feszítő erő, valamennyi absz. C. G. S. rendszerben mérve. A frekvenciát sec⁻¹ egységekben kapjuk, amelyet Hertz német fizikus nevével is szokás megnevezni és Hz-vel jelöljük.

A Taylor-képlet már most lehetővé teszi, hogy a hangközöket (relatív hangmagasságokat) hosszúságok aránya helyett frekvenciák (absz. magasságok) arányával fejezzük ki, minthogy azonban a frekvencia a húr hosszúságával fordítottan arányos, azért ebben a frekvencia-mértékben a hangközöket mérő arány a Pythagoras-féle arányoknak reciprokok értéke lesz. Az oktáv mértéke tehát 2 : 1, ezután következnek a 3 : 2, 4 : 3 stb. intervallumok. A következőkben mindig ezt a frekvencia-mértéket fogjuk használni.

Ha az alaphang frekvenciáját n -nel jelöljük, akkor oktávja $2n$ frekvenciájú lesz, a vele tökéletes konszonanciát adó hangok frekvenciája pedig $\frac{3}{2}n$ és $\frac{4}{3}n$. Ha ezt a 4 hangot absz. magasságuk szerint rendezzük, akkor a következő sort kapjuk:

$$n, \quad \frac{4}{3}n, \quad \frac{3}{2}n, \quad 2n.$$

Ez a legősibb melódia, az első négyhúrú lantok húrjait ezekre hangolták. Ennek a sornak két fele azonos intervallumokat ad, az első két hang s az utolsó két hang is a 4 : 3 arálynak megfelelő intervallumot. A középső két hang relatív magassága ennél kisebb, mert $\frac{3}{2}n : \frac{4}{3}n = 9 : 8$. Ez az előbbieket szerint disszonáns hangköz, viszont dallamok képzésére igen alkalmas, mert a dallamok egymás utáni hangjait annál könnyebb énekelni, minél kisebb magassági ugrással váltják egymást. Így felmerült annak szükségessége, hogy az első és utolsó két hang nagy ugrását közbeeső hangokkal töltsék ki, vagyis az oktáv keretébe eső legegyszerűbb dallamot, a *skálát* megalkossák, amelyben a hangok lépésenként (*diatonikusan*) követik egymást. A fejlődés végső fokán 7 törzshangra jutottak el. Mivel pedig az oktáv után legkonszonansabb hangköz a 3 : 2 arány fejezi ki, nem csodálkozhatunk Pythagorasnak azon az ötletén, hogy a közbeiktatandó hangokat ennek a hangköznek ismételt csatolásából származtassa, s ahol az új hangok valamelyike az oktávot átlépi, azt egy oktávval leszállítva (frekvenciáját 2-vel osztva) az előbbi oktáv keretébe vigye vissza. Az egyes törzshangok frekvenciája eszerint a következő lesz:

$$\begin{aligned} n, \quad \frac{3}{2}n, \quad \frac{3}{2}n \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}n : 2 = \frac{9}{8}n, \quad \frac{9}{8}n \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}n, \\ \frac{27}{16}n \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{32}n : 2 = \frac{81}{64}n, \quad \frac{81}{64}n \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128}n. \end{aligned}$$

A már meglevő $\frac{4}{3}n$ hangot is hasonlóan lehet az n -ből származtatni, ha ettől nem felfelé, hanem lefelé haladunk, vagyis n -et a $\frac{3}{2}$ -del nem szorozzuk, hanem osztjuk, mivel pedig az így nyert hang n -nél kisebb frekvenciájú lenne, ezt egy oktávval felemeljük: $n : \frac{3}{2} = n \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}n$; ezt 2-vel szorozva tényleg $\frac{4}{3}n$ -et kapunk.

Ha most ezeket a hangokat magasságuk szerint rendezzük, s záróhangnak a következő oktáv kezdőhangjával azonos $2n$ -et is hozzáírjuk, akkor megkapjuk a teljes pythagorasi skálát:

$$n, \quad \frac{9}{8}n, \quad \frac{81}{64}n, \quad \frac{4}{3}n, \quad \frac{3}{2}n, \quad \frac{27}{16}n, \quad \frac{243}{128}n, \quad 2n.$$

A *terc*, *szept*, *szeptim* frekvenciája nem ugyanaz, mint amelyet könyvekben lehet találni, mert ezek a pythagorasi skála és nem a később kialakult *harmonikus skála* fokai.

Ennek a skálának tehát 8 foka van, amelyeknek a kezdőhangtól való intervallumát a latin sorszámokkal szoktuk megnevezni. Az első foknak önmagától való távolsága a prím, a 2-iké szekund, a 3-iké terc, a 4-iké kvart, az 5-iké kvint,

a 6-iké szext, a 7-iké szeptim, a 8-iké oktáv. Mint a fenti sorozatból látjuk, a kezdőhanggal csak az oktáv, kvint és kvart konszonál. Dallamképzésre azonban ez a skála nagyon alkalmas, az énekesek és hegedűsök ma is gyakran intonálnak eszerint, ha nem kell alkalmazkodniok valamely fix hangolású hangszerhez. A pythagorasi skála ui. szerkezetileg igen egyszerű, szomszédos hangjai között csak kétféle intervallumot találhatunk: Ha bármelyik fokának frekvenciáját a megelőzőjével osztjuk, vagy $\frac{9}{8}$ -ot, vagy $\frac{256}{243}$ -ot kapunk. Az előbbi pythagorasi egészhangnak, az utóbbit pythagorasi félhangnak nevezzük. A pythagorasi skála szerkezete tehát: 2 egészhang után egy félhang, 3 egészhang után egy félhang.

Ez a skála sok évszázadon keresztül uralkodott a zenében, s a középkori egyházi hangnemek alapját is ez képezte. Domináló helyzetét még akkor is megtartotta, amidőn a zene már elhagyta homofón jellegét, s átalakult polifónná, amelynél már nem egy, hanem két vagy még ennél is több szólam hangozott egyszerre. Ezek a szólamok azonban mind önállóak, egymástól szinte egészen független dallamok voltak, a főfigyelem ezeknek folyamatos és művészies vezetésére irányult, az összhangok (harmóniák), amelyek ilyenkor keletkeztek, csak másodlagos szerepet játszottak. Ez az ún. ellenpontozásos (*kontrapunktikus*) zene lényege.

A pythagorasi hangrendszer fogyatékságai csak akkor kezdtek megmutatkozni, midőn a zeneírók figyelme elsősorban a harmóniák felé fordult, midőn kialakult az újkori *harmonikus* zene. Erről majd egy következő cikkben lesz szó.