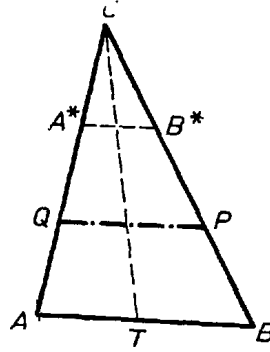


1. feladat. Adott egy ABC háromszög. Szerkesszük meg a háromszög BC oldalán azt a pontot, melyen át AB -vel párhuzamos egyenest húzva a keletkezett trapéz és kis háromszög kerülete egyenlő!

I. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak és legyen a keresett, AB -vel párhuzamos egyenesnek BC -vel, ill. AC -vel alkotott metszéspontja P , ill. Q . A PQ szakasz a kis háromszög és a trapéz kerületének egyaránt része, ezért a kerületek egyenlőségére vonatkozó követelmény így is írható:

$$(1) \quad PC + CQ = PB + BA + AQ,$$

és így $PC + CQ$ egyenlő az ABC háromszög kerületének felével.



Másrészt mivel QP párhuzamos AB -vel, azért a CPQ és CBA háromszögek hasonlóak, és így

$$(2) \quad PC : CQ = BC : CA.$$

Ezek alapján először $k/2 = (AB + BC + CA)/2$ hosszúságú egyenesszakaszt szerkesztünk, majd ezt $BC : CA$ arányban kettéosztjuk, és így nyerjük a keresett PC , ill. CQ szakaszt.

Szerkesztésünk helyessége nyilvánvaló; P mindig a BC szakaszon adódik, mert $PC + CQ = k/2$ a háromszög-egyenlőtlenség folytán kisebb $BC + CA$ -nál.

II. megoldás: Tükrözzük A -t a Q , B -t a P pontra nézve, így nyerjük az A^* , B^* pontokat. (1)-ből az így létrejött további egyenlő darabokat elhagyva

$$B^*C + CA^* = BA.$$

Másrészt nyilvánvaló, hogy A^*B^* párhuzamos AB -vel, amiből következik, hogy

$$B^*C : CA^* = BC : CA.$$

Eszerint az AB oldalt a BC és CA oldalak arányában osztva nyerjük a B^*C és CA^* szakaszokat, a keresett P , Q pont pedig a BB^* , AA^* szakasz felezőpontja.

Megjegyzések: 1. Itt az I. megoldáshoz képest azt nyertük, hogy a felosztandó szakaszt nem kell szerkesztenünk. A felosztás igen egyszerűen adódik az ACB szög CT felezőjével.

2. A feladat általánosítható: előírhatjuk, hogy a kis háromszög és a trapéz kerületei egyenlőség helyett adott λ ($\lambda \neq 1, \lambda > 0$) arányban álljanak:

$$(3) \quad PC + CQ + QP = \lambda(PB + BA + AQ + QP),$$

(ahol λ -t úgy tekintjük adottnak, hogy ismerjük az egységnyi hosszúságú és a λ hosszúságú szakaszt). Előírhatjuk azt is, hogy az (1) két oldalán álló összegek aránya legyen egy adott μ érték:

$$(4) \quad PC + CQ = \mu(PB + BA + AQ).$$

Ezekkel a feladat így hangzik: Adott az ABC háromszög. Szerkesszük meg a BC oldalon a P , és az AC oldalon a Q pontot úgy, hogy PQ párhuzamos legyen BA -val és teljesüljön (3), ill. (4).

Tekintsük előbb a (4) követelmény esetét. Adjunk (4) mindkét oldalához $\mu(PC + CQ)$ -t, így

$$(1 + \mu)(PC + CQ) = \mu(BC + BA + AC),$$

másképpen

$$(4') \quad (PC + CQ) : (BC + BA + AC) = \mu : (1 + \mu).$$

Ennek alapján első lépésül a háromszög területéhez és a μ , $1 + \mu$ szakaszhoz negyedik arányosként megszerkesztjük $PC + CQ$ -t, majd ezt (2)-nek megfelelően két részre osztjuk.

Megoldás létezésének feltétele, hogy $PC + CQ$ kisebbnek adódjék $BC + CA$ -nál. Ezt (4') csekély átalakításával úgy is mondhatjuk, hogy a $\mu : 1$ arány értéke kisebb legyen $(BC + CA) : AB$ -nél; egyenlőség esetén a P pont B -be, Q pedig A -ba esik, a trapéz elfajul egyenesszakasszá.

A (3) követelmény esetében a $PC = a'$, $QC = b'$, $QP = c'$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ egyszerűbb jelölésekkel a fentemlített hasonlóság alapján $b' = ba'/a$ és $c' = ca'/a$. Ezek alapján (3) így alakítható:

$$a' : a = k : \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} k - 2c \right),$$

amiből a' az előbbi esethez hasonlóan megszerkeszthető.

A megoldhatóság feltétele, hogy a' kisebbnek adódjék a -nál, másképpen, hogy – a legutóbbi aránypárból – a $\lambda : 1$ arány értéke kisebb legyen $k : 2c$ -nél.

Egybetűs jelölésekkel a (4) követelmény hasonlóan így alakítható:

$$a' : a = k : \frac{1 + \mu}{\mu} (k - c).$$

2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszögű háromszögnek van két olyan szöge, amelyek különbsége kisebb 30° -nál!

I. megoldás: Az állítás egyenlő szárú háromszögre nyilván igaz, hiszen a két egyenlő szög különbsége 0° . Ezért feltehetjük, hogy a szokásos jelölésekkel

$$(1) \quad \alpha > \beta > \gamma,$$

és a feladat megszorításánál fogva

$$(2) \quad \alpha < 90^\circ.$$

Az állítást indirekt úton bizonyítjuk. Feltesszük, hogy van olyan háromszög, amelyben

$$(3) \quad \alpha - \beta \geq 30^\circ,$$

és

$$(4) \quad \beta - \gamma \geq 30^\circ,$$

és megmutatjuk, hogy ilyen háromszög nem lehet hegyesszögű. Valóban, (3) kétszeresét és (4)-et hozzáadva a szögekre érvényes

$$(5) \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

egyenlőséghez, azt kapjuk, hogy

$$3\alpha \geq 270^\circ, \quad \text{azaz} \quad \alpha \geq 90^\circ.$$

Eszerint hegyesszögű háromszögre (3) és (4) egyidejűen nem teljesülhet, ezért legalább az egyik szögekülönbség kisebb 30° -nál. Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések: 1. Meggondolásunkat egyenlőtlenségekkel való műveletek nélkül is elmondhatjuk. Feltesszük, hogy van olyan pozitív δ és ε szög, hogy

$$(3') \quad \beta = \alpha - (30^\circ + \delta)$$

és

$$(4') \quad \gamma = \beta - (30^\circ + \varepsilon).$$

Előbb (4')-t, majd (3')-t (5)-be helyettesítve átalakítással az

$$\alpha = 90^\circ + \frac{2\delta + \varepsilon}{3}$$

összefüggésre jutunk, ami ellentmond (2)-nek.

2. Több efféle úton járó versenyző szükségtelenül feltette, hogy $\delta = \varepsilon$, vagyis hogy $\alpha - \beta = \beta - \gamma$. Az ilyen megoldások nem teljesek, hiszen csak egy további speciális feltételnek eleget tevő háromszögekkel foglalkoznak; még jobban látszik ez abból, hogy minden ilyen háromszögben $\beta = 60^\circ$.

3. Többen ilyenféleképpen kezdték okoskodásukat: „legyen α csak egy kevésse kisebb 90° -nál, pl. $89^\circ 59'$ ”. Az ilyen feltevés – még ha azt helyes okoskodás követi is – eleve lemond a bizonyítás teljességéről, hiszen figyelmen kívül hagyja mindazokat a hegyesszögű háromszögeket, melyek legnagyobb szöge 90° és $89^\circ 59'$ közé esik. Az idézett feltevés abból a hibás szemléletből ered, mintha létezne a 90° -nál kisebb szögek között egy legnagyobb szög. Ilyen azonban nincs.

II. megoldás: Vizsgáljuk a háromszögnek nagyságra nézve középső szögét, azaz (1) szerint β -t. Ha ez legalább 60° , akkor $\alpha - \beta < 30^\circ$; ha viszont $\beta < 60^\circ$, akkor $\alpha + \beta < 150^\circ$, és így $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) > 30^\circ$, tehát $\beta - \gamma < 30^\circ$. A feladat állítása tehát mindkét esetben teljesül.

3. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy bármely öt egymás után következő egész szám négyzetének összege osztható 5-tel, de 25-tel nem osztható!*

Megoldás: A szimmetria érdekében jelöljük az öt egymás után következő egész szám közül a középsőt a -val, ekkor a feladat annak igazolása, hogy az

$$S = (a - 2)^2 + (a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2 = 5(a^2 + 2)$$

szám osztható 5-tel, de 25-tel nem osztható.

a és azért $a^2 + 2$ is egész és S első tényezője 5, ezért S osztható 5-tel. S akkor és csak akkor lenne 25-tel is osztható, ha a második tényezője, $a^2 + 2$ is osztható volna 5-tel. Evégett $a^2 + 2$ -nek vagy 0-ra, vagy 5-re kellene végződnie, tehát a^2 végződése 8, vagy 3 lenne. Négyzetszám azonban sem 8-ra, sem 3-ra nem végződhet, ezért $a^2 + 2$ sem végződhet 0, vagy 5-re, tehát 5-tel nem lehet osztható a semmilyen egész értéke mellett sem, és így S nem osztható 25-tel.

Megjegyzés: Elkerülhetjük a négyzetszámok lehetséges végződéseire történő hivatkozást, ha megvizsgáljuk az $a^2 + 2$ kifejezés 5-tel való oszthatóságát minden 5-tel való oszthatóság szempontjából különböző a mellett. Ezek a következők:

$a = 5b$ (ahol b egész szám), ekkor $a^2 + 2 = 25b^2 + 2$, és ez 5-tel osztva 2-t ad maradékul;

$a = 5b \pm 1$ esetén $a^2 + 2 = 25b^2 \pm 10b + 3$, ez 5-tel osztva 3-at ad maradékul;

$a = 5b \pm 2$ esetén $a^2 + 2 = 25b^2 \pm 20b + 6$, ez 5-tel osztva 1-et ad maradékul.

Végigvizsgáltunk minden lehetséges esetet, és azt találtuk, hogy $a^2 + 2$ egyik esetben sem osztható 5-tel.