

1. feladat. Állapítsuk meg az

$$y = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$$

függvény maximumát és minimumát!

I. megoldás: Fejezzük ki az adott kapcsolatból x -et y -nal. Így megadhatjuk, mely y -okhoz lehet x -et kiszámítani, más szóval, hogy mely y számokhoz van olyan x érték, amelyre függvényünk az y értéket veszi fel, vagyis mi függvényünk értékkészlete. Ebből már kiválaszthatjuk a keresett maximumot, ill. minimumot – hacsak az értékkészletben van legnagyobb, ill. legkisebb szám.

A nevező sehol sem 0, mert $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \geq 1$, ezért az átszorzással és rendezéssel adódó

$$(y - 2)x^2 + (4y - 6)x + (5y - 6) = 0$$

kapcsolat ekvivalens az eredetivel. Innen

$$(1) \quad x = \frac{-4y + 6 \pm \sqrt{-4y^2 + 16y - 12}}{2(y - 2)},$$

hacsak $y \neq 2$, és $x = -2$, ha $y = 2$.

x a gyökképletből akkor és csak akkor adódik valósnak, ha a diszkrimináns nem negatív, vagyis ha – a másodfokú kifejezést mindjárt szorzattá alakítva –

$$-4(y - 1)(y - 3) \geq 0.$$

Ez pedig nyilván akkor és csak akkor teljesül, ha

$$1 \leq y \leq 3.$$

Ez a kettős egyenlőtlenség írja le függvényünk teljes értékkészletét, mert ennek a külön úton nyert fenti $y = 2$ szám is eleget tesz. Eszerint függvényünknek van maximuma is, minimuma is, éspedig az

$$y_{\max} = 3, \quad \text{ill.} \quad y_{\min} = 1$$

érték. Ezeket a függvény (1) szerint az

$$x_{\max} = -3, \quad \text{ill.} \quad x_{\min} = -1$$

helyen veszi fel.

Megjegyzés. Néhány dolgozat a helyes eredményre a következő téves megfontolással jutott el: „maximum és minimum azok az értékek, amelyeket a függvény csak egyszer vesz fel, ezek azok, ahol a diszkrimináns 0.” Eszerint minden elsőfokú függvény számára minden érték maximum volna és egyben minimum is; másrészt az $y = 1$ érték nem volna maximuma az $y = \sin x$ függvénynek, úgyszintén $y = -1$ sem volna ennek minimuma, mert mindegyik értéket végtelen sokszor veszi fel. Azt mutatja ez, hogy a szélső értékek fogalma egyedül a másodfokú függvényre alapult.

II. megoldás. Osztással és a nevezőben teljes négyzetté való kiegészítéssel az adott kifejezés így alakítható:

$$y = 2 - \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} = 2 - \frac{2(x + 2)}{(x + 2)^2 + 1},$$

majd $x + 2$ helyére új z változót írva

$$(2) \quad y = 2 - \frac{2z}{z^2 + 1} = 2 - 2y_1, \quad \text{ahol} \quad y_1 = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Eszerint y -nak ott van maximuma, ahol az y_1 függvény minimális értéket vesz fel, és ott van minimuma, ahol y_1 maximális. y_1 lehet pozitív, negatív és 0, mert ugyanolyan jelű, mint a z számláló, hiszen nevezője pozitív, $z = 0$ mellett pedig $y_1 = 0$; ezért y_1 maximuma csak pozitív, minimuma csak negatív érték lehet. Elég y_1 -et pozitív z -k mellett vizsgálni, mert z és $-z$ mellett felvett értékei csak előjelben különböznek, tehát az így meghatározandó maximum értékének, és helyének (-1) -szerese megadja a minimum értékét és helyét.

További átalakítással

$$y_1 = \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z + \frac{1}{z}}, \quad \text{azaz} \quad y_2 = z + \frac{1}{z},$$

így y_1 maximuma egyenlő az y_2 függvény minimumával. Vegyük észre, hogy pozitív z mellett az y_2 összeg két tagjának mértani közepe 1, állandó. Ismeretes másrészt, hogy pozitív számok számtani közepe sohasem kisebb mértani közepüknél, és akkor egyenlő vele, ha a számok egyenlők. Eszerint y_2 felének minimuma 1, így $y_{2,\min} = 2$, és ez akkor adódik, ha z az a pozitív szám, amelyre $z = 1/z$, vagyis $z = 1$.

Most már y_1 maximuma $1/2$, és a fentiek szerint minimuma a $z = -1$ helyen $y_{1,\min} = -1/2$; végül (2) szerint y minimuma 1 , maximuma 3 , és e szélső értékeket $x = z - 2$ figyelembevételével az $x = -1$, ill. $x = -3$ helyen veszi fel.

III. megoldás: Alakíthatjuk y -t a következők szerint is:

$$y = 1 + \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 5} = 1 + \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2 + 1},$$

$$y = 3 - \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 5} = 3 - \frac{(x+3)^2}{(x+2)^2 + 1}.$$

Az első alak második tagja sohasem negatív, mert számlálója teljes négyzet és nevezője pozitív. Eszerint y minimumát $x + 1 = 0$ -nál, vagyis az $x = -1$ helyen veszi fel; itt a második tag 0 , és y értéke 1 . Hasonlóan a második alak kivonandója akkor legkisebb, ha $x + 3 = 0$, azaz $x = -3$, és itt értéke 0 , tehát y maximuma 3 .

2. feladat. Adott egy kör és a kör belsejében fekvő P pont. Tekintsük a kör egy félkörnél kisebb AB ívét és jelöljük ennek felezőpontját F -fel. Bizonyítandó, hogy ha

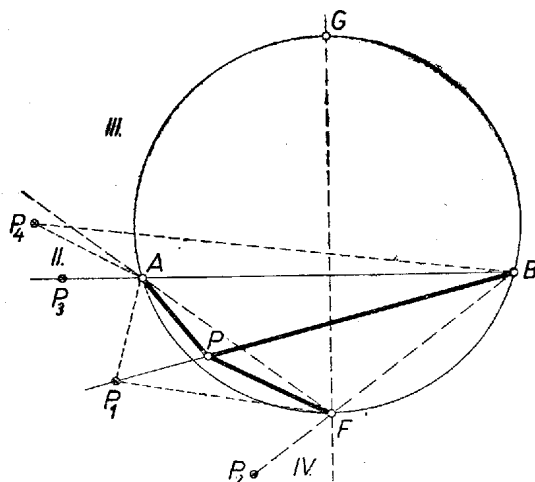
$$(1) \quad PA < PB$$

akkor

$$(2) \quad APF < FPB.$$

I. megoldás: A feltevések folytán P az F ponthoz tartozó FG átmérővel kettévágott k kör azon félkörének belsejében van, amelynek ívén A fekszik.

a) Tulajdonképpen csak az AFG szögtartományban fekvő P pontokra kell bizonyítást adnunk, mert az FA húrral lemetezett kisebb körszeletben levő P pontokra az állítás magától értetődő, hiszen ilyenkor A és B az FP egyenes ugyanazon partján vannak, és ezért az FPB szög része az APF szögnek (1. ábra).

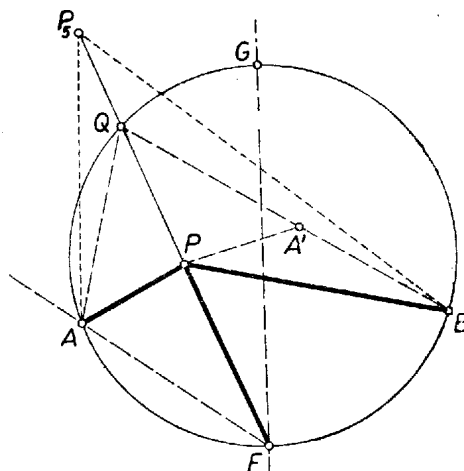


1. ábra

Másképpen: ilyen esetekben a PB félegyenes benne van az APF szögtartományban.

b) Ugyanez áll akkor is, ha P az FA húron van, mert ilyenkor az APF szög bármelyik irányú forgással 180° , az FPB szög pedig kisebb.

c) Ha P az AFG szögtartományban van, akkor FP szétválasztja A -t és B -t. (2. ábra).



2. ábra

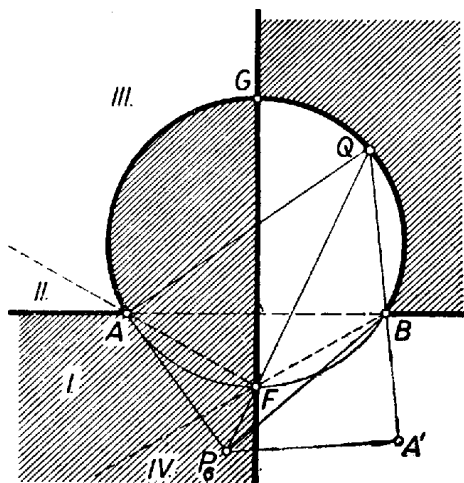
Tükrözzük FP -re az APF szöget, legyen az A pont tükörképe A' . Ekkor elegendő azt igazolnunk, hogy az FPB szög része az FPA -val egyenlő FPA' szögnek. – Messe az FP egyenes k -t másodszor Q -ban. Így egyrészt az FQA és FQB szögek egyenlők, mert k -nak a szárai közötti FA , FB ívei egyenlők, másrészt a tükrözés folytán az FQA és FQA' szögek egyenlők, és ezért A' és QB egyenesen van, továbbá $QA' = QA < QB$, tehát A' a QB húr belső pontja. Így pedig a PB félegyenes valóban az $A'PF$ szögtartományban van.

A fentiekben az állítást P minden lehetséges helyzetére igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Nem használtuk fel, hogy az F -fel felezett AB ív kisebb félkörnél, ezért az állítás bármekkora AB ívre érvényes.

2. A bizonyítás *a)* részében nem használtuk fel, hogy P a k -n belül van, így meggondolásunk az ABF szögtartomány k -n és rajta kívül fekvő I. része minden pontjára érvényes (az 1. ábrán P_1), úgyszintén a BF szakasz F -en túli meghosszabbításának P_2 pontjaira is, mert így a P_2B és P_2F félegyenesek egybeesnek, szögük 0. Az I. síkrész másik határoló félegyenesén, a BA szakasz A -n túli meghosszabbításán levő P_3 pontokra viszont a két kérdéses szög azonos.

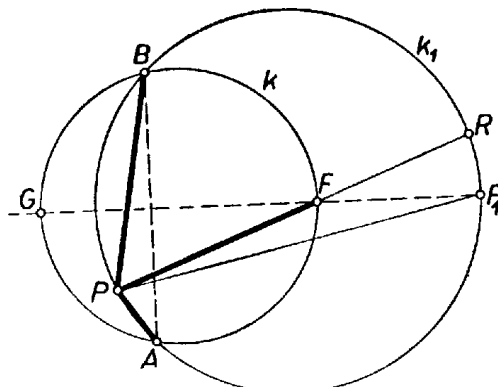
Kézenfekvő most már legalább vázlatosan áttekinteni a kérdéses szögek nagyságviszonyát minden az (1)-et teljesítő P pontra. Ha P kilép I-ből BA -nak A -n túli meghosszabbításán át, de nem lépi át FA -t (II. síkrész, P_4), akkor a PB félegyenes kilép az APF szögtartományból, APF része BPF -nek, (2) iránya ellentétesre fordul. Ugyanez adódik a III. síkrészben, vagyis ha P az AFG szögtartománynak k -n kívüli pontja (a 2. ábrán P_5), mert ilyenkor a *c)* alatti Q pont F és P_5 közé esik, és így $A'P_5F < BP_5F <$.



3. ábra

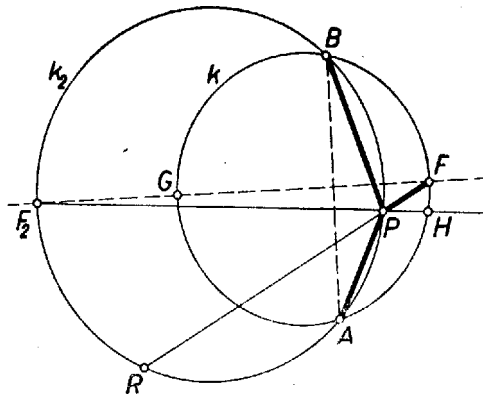
Végül a IV. síkrészben választott P_6 -tal Q a GB íven adódik (3. ábra), ezért $QA' > QB$, így $AP_6F < A'P_6F < BP_6F <$, itt tehát érvényes (2). – Most már a $PA > PB$ követelmény mellett a megfelelő síkrészek határvonalait FG -re tükrözéssel kapjuk, így a 3. ábra csíkozott részein a kérdéses szögek közül APF nagyobb, a világosakon FPB nagyobb, a határvonalakon pedig a két szög – amint az könnyen belátható – egyenlő. (Mezei Ferenc „térképvázlata”).

A további megoldásokban csak a fenti *c)* esettel foglalkozunk, ezt 3 alesetre bontjuk fel aszerint, hogy P az AB -nek F -fel ellentétes, ill. megegyező partján van – vagyis az utóbbi esetben az ABF háromszögben – vagy pedig magán az AB húron. – Mindkét további megoldás Muszély György megoldásainak egyszerűsítése.



4. ábra

II. megoldás: $c_1)$ Ha P az AB -nek F -fel ellentétes oldalán van (4. ábra), akkor a kérdéses APF és FPB szögek a kisebb APB szögnek részei. Az A, B, P pontokon átmenő k_1 kör P -t nem tartalmazó, vagyis k -n kívül levő AB ívének F_1 felezőpontja az AB egyenesnek F -fel egyező oldalára, vagyis GF -nek F -en túl való meghosszabbítására esik. Így F_1 az APF szögtartományban van, F pedig az F_1PB szögtartományban. Ámde PF_1 felezi a kisebb APB szöget, ennél fogva az APF szög F_1PF szöggel nagyobb, az FPB szög pedig ugyanennyivel kisebb az APB szög felénél, ez megfelel az állításnak.



5. ábra

$c_2)$ Ha P az AB -nek F -fel egyező oldalán van (5. ábra), akkor az A, B, P pontokon átmenő k_2 kör P -t nem tartalmazó, vagyis k -n kívül levő AB ívének F_2 felezőpontja az AB egyenesnek F -fel ellentétes oldalára, FG -nek G -n túl való meghosszabbítására esik. A kérdéses APF és FPB szögek egyenes szögnél nagyobb összegét ebben az esetben F_2P -nek P -n túl való PH meghosszabbítása felezi. A PH félegyenes FG -nek A -t tartalmazó oldalán van, ezért az APF szöget osztja részekre. Így az APF szög nagyobb, FPB pedig kisebb az $APH = HPB$ szögnél. Ezt kellett bizonyítanunk.

$c_3)$ Végül ha P az AB szakaszon van, akkor (2) fennáll, mert APF tompaszög, FPB pedig hegyesszög.

Megjegyzések. 1. A $c_2)$ aleset meggondolása nem alkalmazható az FA húrral lemetezett körszeletben felvett P -re, mert ilyen esetben a 180° -nál nagyobb APF szöget hasonlítanók az FPB szöghöz.

2. Lényegében a fenti meggondolást mondjuk el másképpen annak az R pontnak a helyzetét tekintetbe véve, ahol a PF egyenes a k_1 , ill. k_2 kört másodszor metszi.

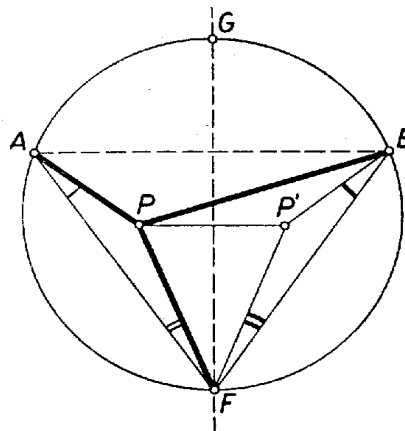
A $c_1)$ esetben (4. ábra) F a k_1 -re nézve belső pont, ezért R egyrészt a PF szakasz F -en túl való meghosszabbításán van, FG -nek P -vel ellentétes, vagyis B -vel egyező oldalán. Másrészt R a P -t nem tartalmazó AB ívnek pontja. Ezek szerint R a (rövidebb) BF_1 íven van. Így k_1 -nek AF_1R íve hosszabb a BR ívnél, tehát $APR \angle > RPB \angle$, vagyis $APF \angle > FPB \angle$.

A $c_2)$ esetben (5. ábra) F a k_2 -re nézve külső pont, ezért R egyrészt az FP szakasz P -n túli meghosszabbításán van, FG -nek P -vel egyező, B -vel ellentétes oldalán, másrészt az AF_2B íven. Így R a (rövidebb) AF_2 ívnek pontja, $AR \angle < RB \angle$, $APR \angle < RPB \angle$, ezért $180^\circ - APR \angle > 180^\circ - RPB \angle$, azaz $APF \angle > FPB \angle$.

III. megoldás: A feladat állítása akkor és csak akkor igaz, ha az APF háromszög A és F -nél levő (belső) szögeinek összege kisebb, mint a BPF háromszög B és F -nél levő (belső) szögeinek összege. Ezt fogjuk bizonyítani.

Legyen P tükörképe FG -re P' , így az $APP'B$ négyszög konvex trapéz.

A $c_1)$ esetben P' az FBP szögtartományban van (6. ábra).



6. ábra

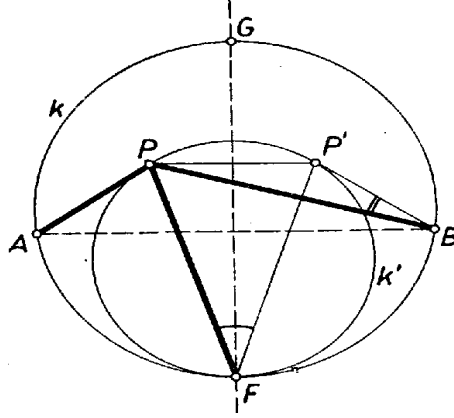
Ugyanis P és P' az ABP háromszög belsejében vannak, tehát $P'BA \angle < FBA \angle$, másrészt az ABP háromszögből (1) alapján $PBA \angle < PAB \angle = P'BA \angle$. Ennélfogva

$$(3) \quad PAF \angle = P'BF \angle < PBF \angle.$$

Másrészt P' a BFG szögtartományban van, amely része BFP -nek, ezért

$$(4) \quad PFA \angle = P'FB \angle < PFB \angle.$$

Most már (3) és (4) két-két szélső tagjának összeadásával a kívánt egyenlőtlenség adódik.



7. ábra

Ha pedig AB elválasztja P -t és F -et (7. ábra), akkor egyrészt

$$(5) \quad PFB \angle - PFA \angle = PFB \angle - P'FB \angle = PFP' \angle,$$

ez pedig PP' látószöge F -ből; másrészt

$$(6) \quad PAF \angle - PBF \angle = P'BF \angle - PBF \angle = PBP' \angle,$$

ez pedig PP' látószöge B -ből; ekkor B ugyanazon oldalán fekszik PP' -nek, mint F . – Mármint a $PP'F$ háromszög köré írt k' kör érinti k -t F -ben, minden más pontja k belsejében van, így B a k' -re nézve külső pont. Ezért PP' -nek B -ből vett látószöge kisebb az F -ből vett látószögénél, azaz (5) és (6) alapján

$$PAF \angle - PBF \angle < PFB \angle - PFA \angle.$$

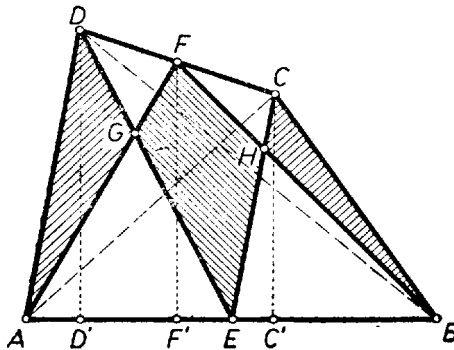
Innen pedig átrendezéssel

$$PAF \angle + PFA \angle < PBF \angle + PFB \angle,$$

amit bizonyítani akartunk.

3. feladat: Legyen az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD oldalának felezőpontja E és F , az AF és DE metszéspontja G , a BF és CE metszéspontja H . Bizonyítandó, hogy az AGD és BHC háromszögek területének összege egyenlő az $EHFG$ négyszög területével.

I. megoldás: Húzzuk meg a négyszög AC és BD átlóit. Az AF és CE szakasz az ACD , ill. ABC háromszögben súlyvonal, tehát a háromszöget két egyenlő területű háromszögre osztja (8. ábra):



8. ábra

$$(1) \quad ADF = ACF, \quad BCE = ACE$$

(az idomok területét ugyanúgy jelöljük, mint magukat az idomokat). Ezekből összeadással

$$(2) \quad ADF + BCE = AECF,$$

mert az $ABCD$ négyszög konvexsége folytán D és B az AC -nek ellentétes partján fekszenek, és ezért ugyanez áll F és E -re is. Figyelembe véve a DE és BF egyenesekkel való felbontást is, (2)-t így írhatjuk:

$$(3) \quad ADG + DGF + BCH + BHE = AEG + CFH + EHFG$$

(mindkét oldalon az $ABCD$ négyszög területének fele áll).

Hasonlóan a DE és BF súlyvonalakkal két-két egyenlő részre osztott ABD és BCD háromszögekből

$$(4) \quad ADE + BCF = EBFD,$$

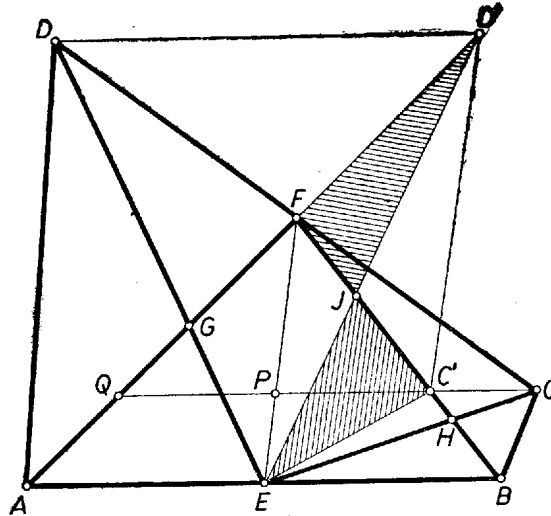
amit részletesebben így írhatunk:

$$(5) \quad ADG + AEG + BCH + CFH = BHE + DGF + EHFG.$$

Már most (3) és (5) összegéből a két oldalon fellépő egyenlő tagok elhagyásával és 2-vel való osztással a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk:

$$ADG + BCH = EHFG.$$

II. megoldás: Ismeretes, hogy a trapézt átlói négy olyan háromszögre bontják, melyek közül a szárakra támaszkodók egyenlő területűek. Ezt a tételt fogjuk háromszor felhasználni. Feltéhetjük, hogy D és C közül D van távolabb AB -től. Húzzunk D -n és C -n át AB -vel párhuzamost és jelöljük ezeknek AF meghosszabbításával, ill. BF -fel való metszéspontját D' , ill. C' -vel (9. ábra), továbbá ED' és FC' metszéspontját J -vel.



9. ábra

$AED'D$ és $EBCC'$ trapézok, így

$$AGD = EGD'$$

és

$$BCH = EHC'.$$

Az EGD' és EHC' háromszögek együttesen nem takarják le az $EHFG$ négyszöget, kinyúlik az $FD'J$, nincs lefedve az $EC'J$ háromszög. Ha sikerül igazolnunk, hogy ezek egyenlő területűek, akkor a feladat tételét bebizonyítottuk. Ehhez viszont elegendő megmutatni, hogy $C'D'$ párhuzamos EF -fel, mert ekkor az $EC'D'F$ négyszög trapéz voltából következik állításunk.

Jelöljük CC' -nek EF és AF -fel való metszéspontját P , ill. Q -val. Így EF az AB szakasszal együtt a vele párhuzamos QC' szakaszt is felezi. Másrészt a QCF és $D'DF$ háromszögek egybevágóságából következik, hogy $QF = FD'$. Tehát P , ill. F a $QC'D'$ háromszög QC' , ill. QD' oldalának felezőpontja, és így valóban PF párhuzamos $C'D'$ -vel.

Ha D és C egyenlő távolságra esnek AB -től, akkor D' és C' egybeesnek F -fel, és így az EGD' és EHC' háromszögek együtt pontosan lefedik az $EHFG$ négyszöget.

III. megoldás: Azt mutatjuk meg, hogy

$$AED + EBC = ABF,$$

illetőleg e területeket 2, 2, ill. 3 idom területének összegeként felírva

$$AEG + ADG + EBH + BCH = AEG + EBH + EHFG.$$

Innen ugyanis a két oldal egyenlő tagjainak elhagyásával a bizonyítandó tételt kapjuk.

Valóban, D, F, C -nek AB -n levő vetületét rendre D', F', C' -vel jelölve (8. ábra) a $CDD'C'$ idom trapéz, és benne FF' a középvonal, tehát

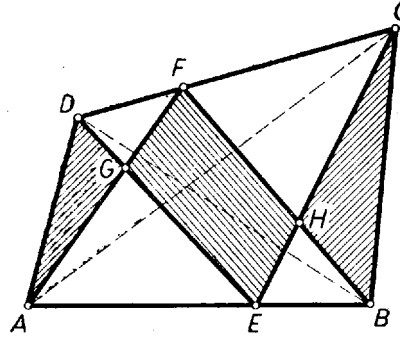
$$\frac{DD'}{2} + \frac{CC'}{2} = FF'.$$

Innen pedig mindkét oldalt AE -vel szorozva, majd az $AE = EB = AB/2$ egyenlőségeket figyelembe véve

$$\frac{1}{2}AE \cdot DD' + \frac{1}{2}EB \cdot CC' = \frac{1}{2}AB \cdot FF'$$

adódik, ami állításunkat igazolja.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása általánosítható: a kimondott terület egyenlőség akkor is fennáll, ha E és F az AB , ill. CD oldalt (nem felezi, hanem) ugyanolyan q arányban osztja két-két részre: $AE : EB = q$, azaz $AE = q \cdot EB$, és ugyanígy $CF = q \cdot FD$ (10. ábra, itt $q = 2$).



10. ábra

Az állítás mindhárom fenti megoldás gondolatmenetével igazolható; alább az I. megoldás módosításával bizonyítjuk. Az ott szereplő (1)–(3) egyenlőségek jobb oldala most a bal oldal q -szorosával lesz egyenlő, (4) és (5) bal oldala viszont a jobb oldal q -szorosával. Így a (3) és (5)-ből keletkezett egyenlőségek összegében 2 helyett $(1 + q)$ -val osztva kapjuk az általánosítás állítását. Ez az általánosítás *Bollobás Béla* dolgozatában szerepel.

2. Könnyű belátni, hogy a nem konvex (vagyis az egy 180° -nál nagyobb belső szöggel bíró, valamint a hurkolt) négyszögekre az állítás nem igaz.