

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha x, y, z különböző egész számok, n pedig nem negatív egész szám, akkor

$$(1) \quad \frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

értéke egész szám.

I. megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy a kifejezést közös nevezőre hozva a számláló osztható a nevezővel, közelebbről azt, hogy a nevező tényezői kiemelhetők a számlálóból, a visszamaradó tényező x, y, z -nek egész együtthatós polinomja. Így ha x, y, z egész, akkor a kifejezés értéke is egész szám.

A közös nevezőre hozott alak

$$(2) \quad \frac{x^n(y-z) + y^n(z-x) + z^n(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}.$$

Itt $n = 0$ -ra a számláló

$$(y-z) + (z-x) + (x-y) = 0,$$

s így 0 a kifejezés értéke. Másrészt ebből

$$x-y = -(y-z) - (z-x).$$

Ezt felhasználva a számláló tetszés szerinti n -re a következőképpen alakítható:

$$(x^n - z^n)(y-z) + (y^n - z^n)(z-x).$$

Ez $n = 1$ -re 0-t ad, ha pedig $n \geq 2$, akkor $(x-z)(y-z)$ -t, kiemelve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} & (x-z)(y-z)[x^{n-1} + x^{n-2}z + \dots + xz^{n-2} + z^{n-1} - \\ & \quad - y^{n-1} - y^{n-2}z - \dots - yz^{n-2} - z^{n-1}] = \\ & = (x-y)(x-z)(y-z)[(x^{n-2} + x^{n-3}y + \dots + xy^{n-3} + y^{n-2}) + \\ & \quad + z(x^{n-3} + \dots + y^{n-3}) + \dots + z^{n-2}]. \end{aligned}$$

Itt a szögletes zárójelben x, y, z -nek egész együtthatós polinomja áll állításunknak megfelelően. (Az $n = 2$ esetben a szögletes zárójelben csak az utolsó tag, az $n = 3$ esetben pedig csak az első kifejezés és az utolsó tag lép fel.)

Megjegyzés. 1. Ha $n \geq 2$, a szögletes zárójelben egyszerű felépítésű polinom keletkezett: azoknak az x, y, z hatványait tartalmazó szorzatoknak az összege, amelyekben a hatványkitevők összege $n - 2$.

2. Sok versenyző a feladat állítását bizonyítottan vélte annyit mutatva meg, hogy a (2) alatti kifejezés számlálóját osztható külön-külön az $x - y, x - z, y - z$ egészekkel. Ebből azonban csak akkor következtethetnénk arra, hogy ezek szorzatával is osztható a számláló, ha a három különbség semelyik kettőjének nem volna 1-nél nagyobb közös osztója; ez azonban általában nem teljesül.

Helyessé tehető ez az okoskodás, ha a számlálót és nevezőt az x, y, z változók polinomjának tekintjük. Ekkor az $x - y, x - z, y - z$ polinomoknak nincs változót tartalmazó közös osztója, és mindegyik kiemelhető a számlálóban szereplő polinomból. Ebből az egész együtthatós polinomok körében is következik, hogy a három kifejezés szorzata is kiemelhető a számlálóból. Néhány versenyző ezen az úton helyes bizonyítást adott a feladat állítására, ezzel azonban lényegesen mélyebb tételt használt fel bizonyítatlanul, mint a bizonyítandó állítás.

Helyessé tehető azonban ez a gondolatmenet a gyöktényezők kiemelésére vonatkozó tételt a következő alakban használva fel: *Ha egy $f(x)$ polinomnak gyöke a t szám, akkor $f(x)$ felbontható $x - t$ -nek és egy polinomnak a szorzatára. Ha $f(x)$ egész együtthatós, és t is egész szám, akkor $x - t$ szorzója is egész együtthatós polinom.* Ez könnyen leolvasható a gyöktényező kiemelésére vonatkozó szokásos bizonyításokból például a következő módon: Legyen

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad \text{és} \quad f(t) = 0.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(t) = a_0(x^n - t^n) + a_1(x^{n-1} - t^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x - t) = \\ &= (x - t)[a_0(x^{n-1} + x^{n-2}t + \dots + t^{n-1}) + a_1(x^{n-2} + \dots + t^{n-2}) + \dots + a_{n-1}] = \\ &= (x - t)[a_0x^{n-1} + (a_0t + a_1)x^{n-2} + (a_0t^2 + a_1t + a_2)x^{n-3} + \dots + \\ & \quad + (a_0t^{n-1} + a_1t^{n-2} + \dots + a_{n-1})]. \end{aligned}$$

Ha itt az a_i együtthatók és t egész szám, akkor nyilvánvalóan egész együtthatós a szögletes zárójelben levő kifejezés is.

Ennek alapján a feladat állítása így látható be:

II. megoldás. A (2) kifejezés számlálója 0, ha n értéke 0 vagy 1. Ha $n \geq 2$, akkor rendezzük a kifejezés számlálóját x hatványai szerint, és végezzük el a kínálkozó kiemelést:

$$(3) \quad \begin{aligned} & x^n(y-z) - x(y^n - z^n) + yz(y^{n-1} - z^{n-1}) = \\ & = (y-z)[x^n - x(y^{n-1} + y^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) + yz(y^{n-2} + \dots + z^{n-2})]. \end{aligned}$$

(Itt $n = 2$ esetén a szögletes zárójelben az utolsó tag utolsó tényezőjén az 1 számot kell érteni.) Tekintsük ezt most az x változó polinomjának, y és z pedig jelentsenek adott különböző egész számokat. Ekkor (3) bal oldala eltűnik az $x = y$ helyen, így a jobb oldal második tényezője is, mert y és z különböző. Ez a tényező egész együtthatós és y is egész, így kiemelhető az $x - y$ tényező és kiemelése után egy egész együtthatós polinom marad vissza.

Ez a polinom eltűnik az $x = z$ helyen, mert (3) bal oldala eltűnik, viszont a jobb oldalon az előző kiemelés után keletkezett $(y-z)(x-y)$ szorzat nem tűnik el, mivel y és z különböző. Így kiemelhető még az $x - z$ tényező is és ismét x egész együtthatós polinomja marad vissza. Ha az így átalakított számlálóban x helyébe is az adott egész értéket helyettesítjük, azt kapjuk, hogy a számláló az $(y-z)(x-y)(x-z)$ szorzatnak egy egész többszöröse, tehát a (2) kifejezés egész szám.

III. megoldás. Jelöljük az (1) kifejezést $P_n(x, y, z)$ -vel. Teljes indukcióval fogjuk bizonyítani, hogy ez az x, y, z változók egész együtthatós polinomja.

Az állítás $n = 0$ -ra igaz, mert $P_0(x, y, z)$ azonosan 0.

Tegyük fel, hogy valamilyen $n = k$ értékre $P_k(x, y, z)$ egész együtthatós polinom. Kiküszöbölve $P_{k+1}(x, y, z)$ -ből és $P_k(x, y, z)$ -ből a harmadik tagot a következő azonossághoz jutunk:

$$P_{k+1}(x, y, z) - zP_k(x, y, z) = \frac{x^{k+1} - zx^k}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^{k+1} - zy^k}{(y-x)(y-z)} = \frac{x^k - y^k}{x-y},$$

azaz

$$(4) \quad P_{k+1}(x, y, z) = zP_k(x, y, z) + (x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1}),$$

ahol $k = 0$ -ra a zárójelben álló összeg 0-val helyettesítendő. Ebből azonnal következik, hogy $P_k(x, y, z)$ -vel együtt $P_{k+1}(x, y, z)$ is x, y, z egész együtthatós polinomja. Állításunk tehát minden nem negatív egész n -re érvényes.

Megjegyzés. A (4) azonosság mindjárt módot is ad a $P_n(x, y, z)$ polinomok lépésről lépésre történő – úgynevezett rekurzív – meghatározására. Megkaphatjuk ebből $P_n(x, y, z)$ explicit előállítását is, teljes indukcióval bebizonyíthatjuk az I. megoldáshoz fűzött 1. megjegyzés állítását.

IV. megoldás. Az (1) kifejezést tekinthetjük a

$$\begin{aligned} P_n^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \frac{x_1^n}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_k)} + \\ &+ \frac{x_2^n}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_k)} + \dots + \frac{x_k^n}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})} \end{aligned}$$

kifejezések speciális esetének, ha $k = 3$. Értelem szerint $P_n(x_1)$ -en x_1^n -t értjük. Az alábbi megfontolások erre az esetre is érvényesek. Megmutatjuk, hogy ezek a kifejezések minden k -ra és tetszés szerinti nem negatív egész n -re a változók egész együtthatós polinomjai.

A bizonyítás történhetik a változók számára vonatkozó teljes indukcióval. A $k = 1$ értékre

$$P_n^{(1)}(x_1) = x_1^n$$

az x_1 változó egész együtthatós polinomja.

Tegyük fel, hogy ha k valamilyen $l - 1$ értékkel egyenlő (ahol $l - 1 \geq 1$), akkor $P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-1})$ a változónak egész együtthatós polinomja. Ekkor képezzük a

$$P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_{l-1}) - P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_l)$$

kifejezést. Itt az x_i^n számlálójú tag mindkét kifejezésben fellép, ha $l > 2$ és $i \leq l - 2$, a nevezők pedig egyenlővé válnak, ha az első törtet $x_i - x_l$ -lel, a másodikat $x_i - x_{l-1}$ -gyel bővítjük. Ekkor a számlálóban

$$x_i^n(x_i - x_l) - x_i^n(x_i - x_{l-1}) = x_i^n(x_{l-1} - x_l)$$

lesz, tehát a két tört összevonásával az

$$\frac{x_i^n(x_{l-1} - x_l)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{l-1})(x_i - x_{l+1}) \dots (x_i - x_{l-1})(x_i - x_l)}$$

tag keletkezik. Az első, ill. második kifejezés utolsó tagját $x_{l-1} - x_l$ -vel bővítve így alakítjuk át:

$$\frac{x_{l-1}^n}{(x_{l-1} - x_1) \dots (x_{l-1} - x_{l-2})} = \frac{x_{l-1}^n (x_{l-1} - x_l)}{(x_{l-1} - x_1) \dots (x_{l-1} - x_{l-2})(x_{l-1} - x_l)},$$

ill.

$$-\frac{x_l^n}{(x_l - x_1) \dots (x_l - x_{l-2})} = \frac{x_l^n (x_{l-1} - x_l)}{(x_l - x_1) \dots (x_l - x_{l-2})(x_l - x_{l-1})}.$$

Így a következő azonosságra jutunk, kiemelve a minden tagban közös $(x_{l-1} - x_l)$ tényezőt:

$$(5) \quad P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_{l-1}) - P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_l) = (x_{l-1} - x_l) P_n^{(l)}(x_1, \dots, x_l).$$

Itt a bal oldalon $P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_{l-1})$ és $P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_l)$ az indukciós feltevés szerint a változók egész együtthatós polinomja; az utóbbi úgy nyerhető az előbbiből, hogy x_{l-1} helyébe x_l -et írunk. Így az egyiket x_{l-1} , a másikat x_l hatványai szerint rendezve a két kifejezésben x_{l-1} , ill. x_l egyenlő hatványainak megegyezik az együtthatója. A különbségben ezeket a közös együtthatókat kiemelve $x_{l-1}^r - x_l^r$ alakú különbségek lépnek fel. Ezek mindegyikéből, s így (5) bal oldalából is kiemelhető az $x_{l-1} - x_l$ tényező. A visszamaradó tényező, ami (5) szerint $P_n^{(l)}(x_1, \dots, x_l)$ -et adja, az $x_1, \dots, x_l$ változók egész együtthatós polinomja. Ezzel indukciós bizonyításunkat befejeztük.

Megjegyzések. 1. A bizonyítást lépésről lépésre követve az is könnyen bizonyítható teljes indukcióval, hogy $P_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$ az $x_1, \dots, x_k$ változók hatványaiból képezett összes olyan szorzatok összege, amelyekben a kitevők összege $n - k + 1$, ha $n \geq k$; $P_n^{(k)}$ azonosan egyenlő 1-gyel, ha $n = k - 1$, ha pedig $n \leq k - 1$, akkor 0-val.

2. Az eddigi bizonyítások mindegyike felhasználta az

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

azonosságot. A következő – lényegében ARATÓ PÉTER dolgozatából származó – megoldásban erre sincs szükség.

V. megoldás. A

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + xz + yz)t - xyz$$

kifejezés, mint t polinomja nyilván eltűnik a $t = x$, $t = y$, $t = z$ helyeken és ugyanez áll a kifejezés t^n -szeresére is. Így ha t az x , y , z akármelyikét jelenti, azonosan teljesül, hogy

$$(6) \quad \begin{aligned} t^{n+3} &= t^{n+2}(x + y + z) - t^{n+1}(xy + xz + yz) + t^n xyz, \\ (t &= x, \quad \text{vagy} \quad t = y, \quad \text{vagy} \quad t = z) \end{aligned}$$

(ami különben közvetlenül is könnyen belátható).

Jelöljük a feladatban szereplő kifejezést $P_n(x, y, z)$ -vel, amint a III. megoldásban is tettük, akkor $P_{n+3}(x, y, z)$ tagjainak számlálójában felhasználva a (6) azonosságokat, a következő azonossághoz jutunk:

$$\begin{aligned} P_{n+3}(x, y, z) &= (x + y + z)P_{n+2}(x, y, z) - (xy + xz + yz)P_{n+1}(x, y, z) + \\ &\quad + xyzP_n(x, y, z). \end{aligned}$$

Ebből látjuk, hogy ha kifejezésünk n három egymásutáni egész értékére a változók egész együtthatós polinomja, akkor ugyanez áll minden nagyobb n egész számra is. Mivel pedig $P_0(x, y, z) = P_1(x, y, z) = 0$, $P_2(x, y, z) = 1$, így $P_n(x, y, z)$ minden nem negatív egész n -re az x , y , z változók egész együtthatós polinomja.

Megjegyzés. Az V. megoldás módszerével is bizonyítható a IV. megoldásban szereplő általánosabb állítás tetszés szerinti adott k -ra, csak ekkor $n = 0, 1, \dots, k - 1$ -re kell meghatározni $P_n^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ értékét.

2. feladat. *Megmértük egy vízszintes terepen álló antennatorony emelkedési szögét a talppontjától 100 m, 200 m és 300 m távolságból. A három szög összege 90° . Milyen magas a torony?*

Igen egyszerű trigonometriai megoldás kínálkozik a feladatra és a versenyzők mind ilyen utat is választottak.

I. megoldás. Jelöljük a torony magasságát méterben mérve x -szel, a látószögét 100, 200, 300 m-ről rendre α , β , γ -val, ekkor

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{100}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{x}{200}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{300},$$

és feltétel szerint $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, tehát

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{x}{300} = \operatorname{tg} [90^\circ - (\alpha + \beta)] = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \\ &= \frac{\frac{100}{x} \cdot \frac{200}{x} - 1}{\frac{100}{x} + \frac{200}{x}} = \frac{100 \cdot 200 - x^2}{300x}. \end{aligned}$$

Innen

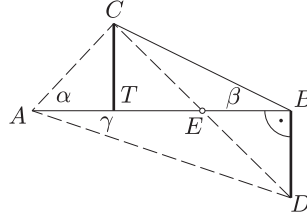
$$2x^2 = 100 \cdot 200,$$

és mivel x gyanánt csak pozitív érték jön számításba, tehát a torony magassága $x = 100$ m.

Megjegyzés. Mint többen észrevették, megoldható a feladat ugyanezzel a gondolatmenettel akkor is, ha tetszés szerinti a, b, c távolságokból mért α, β, γ látószögekről tudjuk azt, hogy összegük 90° . Ekkor a torony magassága $\sqrt{abc/(a+b+c)}$.

Megoldható azonban a feladat lényegesen egyszerűbb összefüggésekre támaszkodva is.

II. megoldás. Sík talajon nem lényeges, hogy milyen irányból mérjük a torony látószögét az adott távolságokból, válasszuk tehát a 100, ill. 200 m távolságra levő A , ill. B pontokat a toronytól egymással ellentétes irányban, a γ látószöget pedig szemléltessük úgy, hogy a B pontból az AB egyenesnek a torony C csúcsával ellentétes oldalán mérünk fel AB -re merőlegesen a torony magasságával egyenlő BD távolságot. Ekkor $\angle BAD = \gamma$, mert $AB = 300$ m.



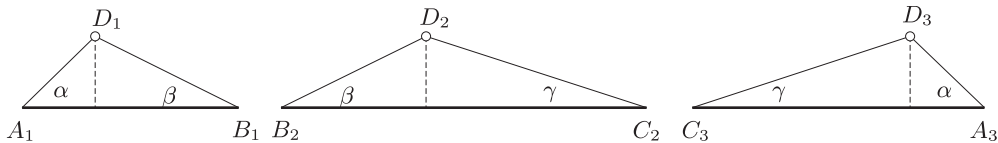
1. ábra

A torony T talppontja, C csúcsa továbbá a B és D pontok meghatározta négyszög paralelogramma, mert két oldala egymással párhuzamos és egyenlő, tehát CD a TB szakaszt E felezőpontjában metszi. Eszerint $ET = 100$ m, s így $\angle TEC = \alpha$, az ACE háromszög egyenlő szárú. Megállapíthatjuk C -nél levő szögének a nagyságát is abból, hogy az $ADBC$ négyszög A -nál és B -nél levő (szemben fekvő) szögeinek összege $\alpha + \gamma + \beta + 90^\circ$, a feltétel szerint 180° -ot ad; a négyszög tehát húrnégyszög, és AD a körülírt kör átmérője, mert a B pontból 90° -os szögben látszik. Így az $\angle ACD = \angle ACE$ szintén 90° -os, az ACE egyenlő szárú háromszög tehát derékszögű. Ebből adódik, hogy $\alpha = 45^\circ$, így az ATC derékszögű háromszög ugyancsak egyenlő szárú, tehát a torony magassága 100 m.

III. megoldás. Rajzoljuk meg a tornyot háromféleképpen. Két oldalról egyrészt az α és β látószögű egyenesekkel, másrészt β és γ , harmadrészt γ és α látószögű egyenesekkel (2. ábra). A keletkező három háromszögben az A_1B_1 , B_2C_2 , C_3A_3 oldalakon levő szögek összege $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, így a D_1, D_2, D_3 -nál levő szögek összege 360° . Mivel még $B_1D_1 = B_2D_2 = C_3D_3$, így a három háromszög egy ABC háromszöggé tehető össze. Ennek oldalai $AB = 300$ m, $BC = 500$ m, $CA = 400$ m kielégítik a

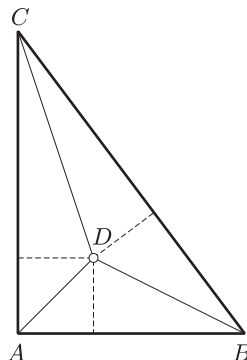
$$BC^2 = CA^2 + AB^2$$

összefüggést, és ismeretes, hogy ebből következik a háromszög derékszögű volta, (a Pythagorász-tétel megfordítható) derékszöggel az A csúcsnál. Így $2\alpha = 90^\circ$, és ebből következik, hogy a torony 100 m magas.



2. ábra

Megjegyzés. A II. megoldás lényegesen kihasználja a feladat speciális adatait, a III. azonban csak részben. Ha ugyanis megfigyeljük, hogy az összeillesztésnél a D_1, D_2, D_3 egybeesésével keletkező D pont az ABC háromszög beírt körének a középpontja, akkor területszámítás segítségével más távolságadatok mellett is meghatározható a torony magassága.



3. feladat. *Három fivér egy napon látogatott meg egy beteget. Ugyanazon a napon mindegyiknek a felesége is ott járt. Egyikük sem volt ott aznap többször. Mindhárom fivér találkozott a betegágynál mindkét sógornőjével. Bizonyítandó, hogy valamelyikük a feleségével is találkozott ott.*

I. megoldás (KÓTA GÁBOR dolgozata nyomán). Tegyük fel, hogy pl. A és A -né nem találkozott a betegágynál. Ekkor A -né vagy elment, mielőtt férje megérkezett és ez esetben korábban távozott a betegágytól mint két sógornője, hiszen ők találkoztak a betegágynál az A -né távozása után érkező A -val, vagy pedig A -né A távozása után érkezett és ekkor később érkezett mint két sógornője, hiszen azoknak A távozása előtt kellett a beteghez érkezniük. Csak úgy lehet tehát, hogy egy asszony nem találkozott a férjével, ha vagy előbb távozott, mint a két sógornője, vagy később érkezett náluk.

Azonban három asszony közül legalább az egyik sem nem érkezett a másik kettő után, sem nem távozott azok távozása előtt, így legalább egynek találkoznia kellett a férjével.

II. megoldás. Indirekt úton bizonyítjuk a feladat állítását. Tegyük fel, hogy egyik házaspár sem találkozott a betegágynál. Ez esetben, ha pl. A előbb érkezett A -nénél, akkor el is kellett távoznia felesége érkezése előtt. Viszont találkozott B -nével, tehát B -né előbb érkezett mint A -né. B -nek felesége távozása után kellett érkeznie, csak így találkozhatott A -néval anélkül, hogy feleségével találkozott volna. Ha A a felesége után érkezett a betegágyhoz, akkor fenti megfontolásunkban férj és feleség szerepét mindenütt megcserélve szintén azt nyerjük, hogy férj és feleség a B házaspárból fordított sorrendben kellett, hogy a betegágyhoz érkezzék, mint az A házaspárból.

Ugyanezt a megfontolást megismételve egyrészt az A és C házaspárra, másrészt a B és C házaspárra azt kapjuk, hogy C és C -né fordított sorrendben kellett hogy a betegágyhoz érkezzék, mint A és A -né, de ugyancsak fordított sorrendben, mint B és B -né. Ez azonban már lehetetlen, tehát legalább egy házaspárnak találkoznia kellett a betegágynál.

Megjegyzés. A most ismertetett megfontolás alkalmas egy általánosabb tétel bizonyítására is. Hogy ezt könnyebben megfogalmazhassuk, előbb átfogalmazzuk az eredeti feladatot.

A három házaspár elhelyezkedhet egy kerek asztal körül pl. A , B -né, C , A -né, B , C -né sorrendben (C -né másik szomszédja A). Ekkor azt mondhatjuk: a hattagú társaság minden tagja meglátogatott (pl. másnap) egy beteg ismerőst. Mindenki csak egyszer járt ezen a napon a betegágynál és mindenki találkozott ott mind a két előző napi asztalszomszédjával. Ez csak úgy történhetett, hogy valaki házastársával (azaz a vele szemben ülővel) is találkozott.

Ez speciális esete a következő általánosabb tételnek: *Egy nap n házaspár beszélgetett egy asztal körül, ahol úgy helyezkedtek el, hogy mindenki éppen házastársával szemben ült. Elhatározták, hogy másnap mindegyikük meglátogatja egy közös ismerősiüket, aki beteg. A látogatás során úgy adódott, hogy mindenki találkozott a betegágynál két előző napi asztalszomszédjával és ezen a napon mindenki csak egyszer járt a betegnél. Ekkor valamelyik házaspár találkozott a betegágynál.*

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy egyik házaspár sem találkozott, noha a többi feltételek teljesültek. Az asztalszomszédok legyenek sorra $A_1, A_2, \dots, A_{2n}, A_1$, itt A_1 és A_{n+1}, A_2 és $A_{n+2}, \dots, A_n$ és A_{2n} házastársak. Tegyük fel, hogy a betűzést úgy választottuk, hogy A_1 előbb érkezett a betegágyhoz, mint házastársa, A_{n+1} (és feltevésünk szerint el is kellett távoznia A_{n+1} érkezése előtt).

Ekkor A_2 , aki találkozott A_1 gyel, előbb kellett, hogy érkezzék, mint A_{n+1} . Így A_{n+2} , aki találkozott A_{n+1} -gyel, de feltevésünk szerint nem találkozott házastársával, A_2 -vel, csak A_2 távozása után érkezhetett. Hasonlóan A_{n+3} -nak A_3 távozása után kellett érkeznie és így tovább. Így azonban az n -edik lépésben azt kapjuk, hogy az A_{2n} -nel találkozó A_1 csak azután érkezhetné a betegágyhoz, miután A_n -nel találkozó házastársa, A_{n+1} eltávozott, holott abból indultunk ki, hogy A_1 előbb érkezett mint A_{n+1} .

Nem lehet tehát, hogy egyik látogató se találkozzék a betegágynál a házastársával.