

1. feladat: k -nak mely pozitív egész értékei mellett lesz a

$$N = 3^{6n-1} - k \cdot 2^{3n-2} + 1$$

kifejezés n minden pozitív egész értékére osztható 7-tel?

Megoldás: Ha N valamilyen k érték mellett minden n -re osztható 7-tel, akkor $n = 1$ -re is osztható, tehát

$$(1) \quad 3^5 - 2k + 1 = 244 - 2k = 7m.$$

Itt a bal oldal páros, tehát a jobbnak is párosnak kell lennie. Ez akkor és csak akkor áll fenn, ha m páros: $m = 2m_1$. Így k -ra azt kapjuk, hogy

$$k = 122 - 7m_1 = 7(17 - m_1) + 3 = 7m_2 + 3.$$

Itt m_2 tetszős szerinti egész értéke mellett fennáll (1) az $m = 34 - 2m_2$ értékkel.

Megmutatjuk másfelől, hogy N minden n -re 7-tel osztható számmal tér el az $n = 1$ -hez tartozó értéktől. Valóban

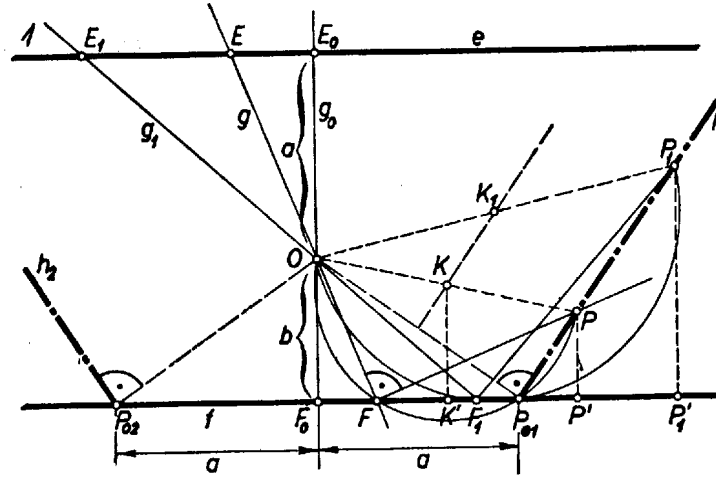
$$N - (3^5 - 2k + 1) = 3^5(3^{6(n-1)} - 1) - 2k(2^{3(n-1)} - 1),$$

és a jobb oldal első különbsége osztható $3^6 - 1 = (3^3 - 1)(3^3 + 1) = 26 \cdot 28$ -cal, tehát 7-tel is, a második tag pedig osztható $2^3 - 1 = 7$ -tel, így az egész különbség is.

Azt kaptuk tehát, hogy N akkor és csak akkor osztható minden n -re 7-tel, ha ez az $n = 1$ -hez tartozó értékére teljesül, ehhez pedig szükséges és elegendő is, hogy k 7-tel osztva 3-at adjon maradékul.

2. feladat: Adva vannak az e, f párhuzamos egyenesek és köztük az O pont; O távolsága e -től a , f -től b . Az O -n áthúzott g egyenes e -t E -ben, f -et F -ben metszi. F -ben merőlegest állítunk g -re, és erre az e -vel való metszéspontja irányában felmérjük az OE szakaszt, ennek végpontja P . Mi a P pont mértani helye, ha g az O körül forog?

I. megoldás: Legyen g -nek az f -re merőleges helyzete g_0 , ennek metszéspontjai e, f -en E_0, F_0 . Ekkor a kérdéses merőleges maga f , így az e -vel való metszéspont nem létezik, P nem szerkeszthető egyértelműen; azonban f -nek F_0 -tól $OE_0 = a$ távolságra fekvő P_{01} és P_{02} pontjait tágabb értelemben a mértani helyhez tartozóknak tekinthetjük. – Elegendő g -nek azon helyzeteivel foglalkoznunk, amelyek f -et az F_0P_{01} félegyenesén metszik, mert a mértani helynek az így mellőzött pontjait a figyelembe vettek közül g_0 -ra való tükrözéssel megkaphatjuk, hiszen g minden mellőzött helyzetének megvan a tükörképe a figyelembe vett helyzetek között.



Legyen a forgó egyenesnek egy g helyzetében OP felezőpontja K , P és K vetülete f -en P' , K' . Ekkor az FPP' és OEE_0 derékszögű háromszögek egybevágók, mert $FP = OE$, továbbá F , ill. O -nál levő szögeik merőleges szárú hegyes szögek, és ezért egyenlők. Így $FP' = OE_0 = a = F_0P_{01}$ és F a P' -től ellentétes irányban van, mint P_{01} az F_0 -tól (ugyanis az F_0FP szög nagyobb az OFP szögnél, ez pedig derékszög). Ezért P_{01} és F tükrös párok az F_0P' szakasz felező merőlegesére – ami egyben az $OF_0P'P$ trapéz KK' középvonala –, és így $KP_{01} = KF$. Másrészt K az OFP derékszögű háromszög köré írt kör középpontja. Ezek szerint e kör átmegy P_{01} -en és ezért az $OP_{01}P$ szög (g bármely helyzete mellett) derékszög; más szóval P csak a P_{01} -ben OP_{01} -re állított merőlegesen fekszik. Tegyük hozzá: az FP szakaszok felmérési irányára tekintettel P a merőlegesnek csak azon a h_1 félegyenesén lehet, amely f -nek ugyanazon partján van, mint e (és O).

Megmutatjuk, hogy a figyelembe vett g helyzetekre a keresett mértani hely éppen h_1 , vagyis h_1 bármely P_{01} -től különböző P_1 pontja előáll g valamely helyzetéből.

g_1 -nek a P_1 -et előállító helyzetére, ill. a vele adódó E_1, F_1 -re egyrészt a P_1F_1O szögnek derékszögnek, másrészt $F_1P_1 = OE_1$ -nek kell lennie. Az első követelményből g_1 egyértelműen megszerkeszthető, ehhez F_1 -et az OP_1 átmérőjű (és $P_1P_{01}O \angle = 90^\circ$ folytán P_{01} -en átmenő) Thalész-körnek f -fel való, P_{01} -től különböző metszéspontja adja

- amennyiben két ilyen metszéspont van $-$, és $F_1 \equiv P_{01}$, ha e kör érinti f -et. E kör K_1 középpontja rajta van az $F_0P'_1$ szakasz felező merőlegesén (P'_1 a P_1 vetülete f -en), így F_1 és P_{01} tükrös pontpár $F_0P'_1$ felezőpontjára, és ezért $F_1P'_1 = F_0P_{01} = OE_0$. Így az OE_1E_0 és $F_1P_1P'_1$ derékszögű háromszögek egybevágók (E_1 a g_1 és e metszéspontja), mert O , ill. F_1 -nél fekvő szögük szárai páronként merőlegesek (Thalész-kör), ennél fogva $OE_1 = F_1P_1$ amit bizonyítani akartunk. (Teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy F_1 az F_0P_{01} félegyenesen van, mert nem lehet sem F_0 -ban, sem az F_0P_{02} , félegyenesen; ugyanis F_0 a körre nézve külső pont, K_1 az OP_0 szakasz felező merőlegesének azon a félegyenesén van, amely OP_{01} -nek F_0 -val ellentétes oldalára esik, az utóbbinak pontjai pedig F_0 -tól távolabb vannak, mint P_{01} -től.)

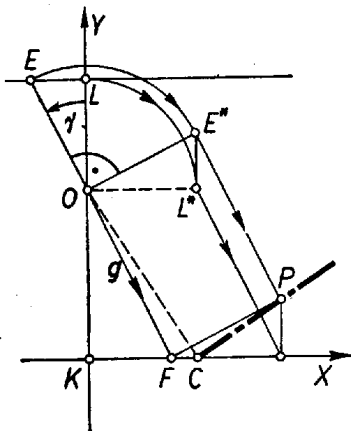
Ezek szerint a keresett mértani helyet h_1 és ennek g_0 -ra való h_2 tükörképe adja, vagyis az f egyenes $F_0P_{01} = F_0P_{02} = OE_0$ tulajdonságú P_{01} , P_{02} pontjaiban OP_{01} , ill. OP_{02} -re állított merőlegeseknek azok a félegyenesei, amelyek f -nek O -t tartalmazó partján vannak. P_{01} és P_{02} a mértani helynek csupán tágabb értelemben vett pontjai.

Megjegyzések. 1. $FP' = F_0P_{01}$ megállapítása után – ahol a szakaszok iránya is megegyező –, vizsgálatunkat így is befejezhetjük: eszerint $P_{01}P' = F_0F$, másrészt $PP' = EE_0$, ennél fogva $PP' : P_{01}P' = EE_0 : F_0F = OE_0 : OF_0 = a : b$, azaz állandó, tehát bármely P -be P_{01} -ből ugyanaz az irány mutat. Így azonban még hátra van ennek az iránynak a meghatározása.

2. Többen pontos rajzú próbák nélkül azt a pusztán szabadkézi vázlatra alapított sejtésüket próbálták igazolni, hogy a mértani hely kör, hiperbola, hiányos parabola, vagy két kotangens-görbe.

A versenyzők nagyobb része a koordináta-geometria módszereivel kereste a mértani hely egyenletét, gyakran elég bonyolult számításokkal, a szakaszfelmérést egyenes és kör metszésének tekintve, ami két lehetőséget ad P -re, a helyes irány megválasztása pedig diszkussziót igényel. Alább egy ezt a lépést kikerülő, részben koordináta-geometriai megoldást adunk.

II. megoldás: Válasszuk f -et X -, és a rá O -n át húzott merőlegest Y -tengelynek úgy, hogy O ordinátája b legyen, és legyen a kezdőpont K , továbbá e és az Y -tengely metszéspontja L . Tekintsük egyelőre azokat a g -ket, amelyek az X -tengelyt pozitív abszcisszájú F -ben metszik, és jellemezzük g helyzetét azzal a γ pozitív hegyes szöggel, amellyel O körül az Y -tengelyhez képest el van fordulva. Így F , E koordinátái: $(b \operatorname{tg} \gamma, 0)$, $(-a \operatorname{tg} \gamma, b + a)$ és a felmérendő $OE = z$ szakasznak az Y -tengelyre való vetülete a , az X -tengely irányára pedig $LE = -a \operatorname{tg} \gamma$.



E szakasz előírt felmérését helyettesíthetjük O körüli -90° -os elforgatásával és O -nak F -be való eltolásával.

Így az elforgatott OE^* vetületei X, Y irányára $OL^* = a$, $L^*E^* = a \operatorname{tg} \gamma$, és az eltolás után P koordinátái: $x = b \operatorname{tg} \gamma + a$, $y = a \operatorname{tg} \gamma$. (f, e pontjainak ordinátája 0, ill. $b + a > 0$, ennél fogva OE -nek e felé való felmérése P -re pozitív ordinátát ír elő; valóban $y > 0$, mert $\gamma > 0^\circ$).

A keresett mértani hely eddig tekintetbe vett részének egyenletét P koordinátáiból a γ paraméter kiküszöbölésével kapjuk:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x-a}{b} = \frac{y}{a} \text{ -ból : } y = \frac{a}{b}(x-a),$$

és ehhez járul $\operatorname{tg} \gamma > 0$ helyett az $y/a > 0$, azaz $y > 0$ megszorítás. Ez félegyenes egyenlete, amely az X tengelyt az $x = a$ abszcisszájú C pontban metszi (itt a kezdőpontja) és amely merőleges OC -re, mert OC iránytangense $-b/a$.

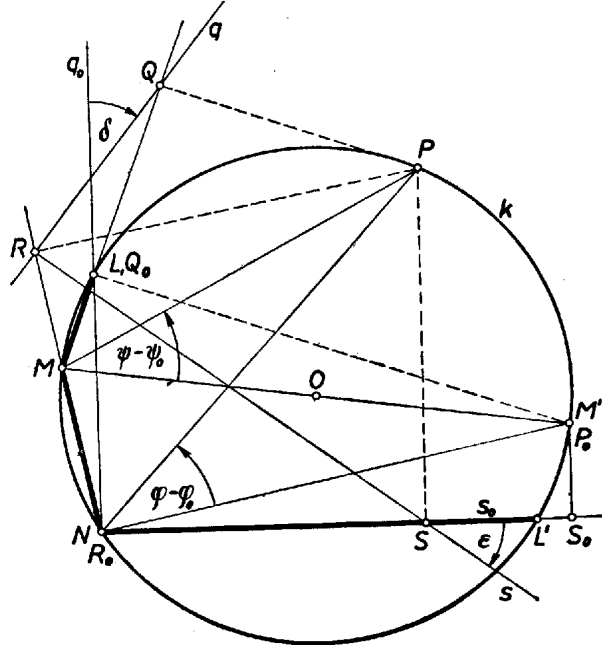
Hasonlóan kapjuk az X -tengelyt negatív abszcisszájú F -ben metsző g egyenesekre $F(-b \operatorname{tg} \gamma, 0)$ és $E(a \operatorname{tg} \gamma, b + a)$ -ből P -re: $x = -b \operatorname{tg} \gamma - a$, $y = a \operatorname{tg} \gamma$ (itt γ a g elfordulása Y -től a negatív forgási irányban). Eszerint P abszcisszája az előbbinek -1 -szerese, ordinátája változatlan, ez az Y -tengelyre való tükrözést jelent, ennél fogva a mértani hely hiányzó része az eddigiből az f -re O -n át húzott merőlegesen való tükrözéssel áll elő.

Megjegyzések. 1. A fentiekben nem „tisztá” koordináta geometriai módszerrel dolgoztunk, több lépést elemi, ill. trigonometriai úton végeztünk.

2. OE -nek a g -re merőlegesen való felmérésével adódó pontot megkaphatjuk a merőleges és a g -ből (rá merőlegesen) OE nagyságú eltolással előálló g' egyenes metszéspontjaként is. Így azonban mindegyik említett egyenes egyenletét fel kellene írunk, és többet kellene számolnunk. Az „ e felé” való eltolás révén a g' -vel az Y -ból lemetezett szakasz b -ről $b + OE/\sin \gamma = b + a/\sin \gamma \cos \gamma$ -ra növekszik.

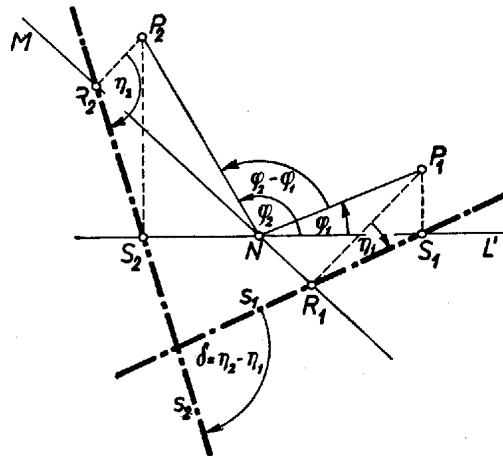
3. feladat: Egy $ABCA'B'C'$ konvex hatszög csúcsai egy kör AA' , BB' , CC' átmérőinek végpontjai, és P a körnek a hatszög csúcsaitól különböző pontja. Legyenek P -ből az AB , BC , CA' , $A'B'$, $B'C'$, $C'A$ oldalra bocsátott merőlegesek talppontjai rendre Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 , Q_5 , Q_6 . Bizonyítandó, hogy a $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ hatszögnek bármelyik két egymás utáni oldala derékszöget alkot, továbbá, hogy a Q_1Q_4 , Q_2Q_5 , Q_3Q_6 szakaszok felező pontjai és P egy körön fekszenek.

I. megoldás: A $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6 = H_2$ hatszög bármelyik két egymás utáni oldalát – három egymás utáni csúcsát – az $ABCA'B'C' = H_1$ hatszög három egymás utáni oldala – négy egymás utáni csúcsa – határozza meg; és az első és a negyedik csúcs egy átmérőnek két végpontja.



Ezért az állítás első részében elég azt bizonyítanunk, hogy ha L , M , N , L' ebben a sorrendben egy k körnek egymástól különböző pontjai, LL' a k -ban átmérő, és egy a k -n fekvő P -ből az LM , MN , NL' egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre Q , R , S , akkor $QR = q$ és $RS = s$ egymásra merőlegesek. Evégett megmutatjuk egyrészt, hogy P egy bizonyos P_0 helyzetében $Q_0R_0 = q_0$ és $R_0S_0 = s_0$ merőlegesek, másrészt hogy ha P elmozdul a k -n, akkor $QR = q$ és $RS = s$ egymással megegyező irányban ugyanakkora szöggel fordulnak el. (L , M , N és L' sorrendje megfelel H_1 konvexségének.)

Valóban, P_0 -ként az M -en átmenő átmérőnek M' másik végpontját véve Q_0 az L -be, R_0 az N -be esik, így $Q_0R_0S_0 \angle = LNS_0 \angle = LNL' \angle$, és ez a feltevésnél fogva derékszög.



Legyen η az s (előjellel vett) hajlósszöge PR -nek attól a élegyenesétől mérve, amely MN -nek ugyanazon partján van, mint L . Az N , P , R , S pontok P bármely helyzetében húrnégyszöget határoznak meg, ebből látható, hogy η mindig egyenlő a $\varphi = L'NP$ szöggel, de avval ellentétes irányú: $\eta = -\varphi$. Eszerint ha P a P_1 helyzetből P_2 -be megy át, akkor a megfelelő s_1 -nek s_2 -be való δ elfordulási szögét P_1R_1 és P_2R_2 párhuzamossága folytán az $\eta_2 - \eta_1$ különbség adja, és erre $\delta = \eta_2 - \eta_1 = -(\varphi_2 - \varphi_1)$, vagyis s elfordulása egyenlő, de ellentétes irányú NP elfordulásával. (Ez nem a k -n fekvő P -re is érvényes.) – Eredményünk alapján egy P_2 -ből szerkesztett q_2 -nek egy P_1 -ből szerkesztett q_1 -hez képest való ε elfordulási szöge is kiadódik: $-(\psi_2 - \psi_1)$, ahol ψ_1 és ψ_2 a $\psi = NMP$ szög megfelelő két értékét jelöli. –

III. megoldás: Megmutatjuk, hogy H_2 -nek egy oldala a tőle számított második oldallal párhuzamos, és a harmadikra merőleges; ebből már következik, hogy a második és a harmadik oldal egymásra merőleges, vagyis az állítás első része igaz. Valóban, egyrészt pl. Q_6Q_1 párhuzamos Q_3Q_2 -vel, mert egyenlő szöget alkotnak a Q_6P (másképpen Q_3P) félegyenessel: $PQ_6Q_1 \sphericalangle = PAQ_1 \sphericalangle = PCQ_2 \sphericalangle = PQ_3Q_2 \sphericalangle$ továbbá Q_1 és Q_2 a PQ_3 egyenesnek ugyanazon partján fekszenek. Másrészt Q_6Q_1 merőleges Q_3Q_4 -re. Ugyanis a Q_6 -nál derékszögű PAQ_6 és a Q_3 -nál derékszögű $A'PQ_3$ háromszögek hasonlóak, mert P -nél fekvő hegyes szögeik PA és PA' merőlegessége folytán egymásnak pótszögei; a PAQ_6 háromszög egy $+90^\circ$ szögű forgatva nyújtással áll elő $A'PQ_3$ -ból (megfelelők azok a csúcsok, amelyek a két felsorolásnak ugyanannyiadik tagjai). Ugyanez érvényes a Q_1 -nél, Q_4 -nél derékszögű PAQ_1 és $A'PQ_4$ háromszögekre is, és így a PQ_6AQ_1 , $A'Q_3PQ_4$, négyszögekre is, mert a hasonlóság aránya mindkét esetben ugyanaz: a PA , $A'P$ átfogók

aránya. Így Q_6Q_1 is $+90^\circ$ -os forgatva nyújtással áll elő Q_3Q_4 -ből (ez többet is mond annál, mint amit állítottunk), ennél fogva Q_3Q_2 merőleges Q_3Q_4 -re.

Megjegyzés. Egyenesek párhuzamosságára támaszkodik a következő bizonyítás is. Legyen k és a PQ_6 egyenes második közös pontja P^* . Ekkor $CQ_2Q_3\triangleleft = CPQ_3\triangleleft = CPP^*\triangleleft = CBP^*\triangleleft$, eszerint P^*B párhuzamos Q_3Q_2 -vel. Hasonlóan $P^*B' \parallel Q_3Q_4$, így a $Q_2Q_3Q_4$ szög egyállású a BP^*B' szöggel, ez pedig derékszög.